質問1：仮想仕事式の位置の変数の変換について（第1日目：講義A）

仮想仕事式を空間表示から物質表示に書き換える手続きの説明で、「現在配置での構 成則はわからないので、既知の基準配置の構成則を利用するために、変数変換を行 う」とのことでしたが、そもそも構成則は解析対象に固有のもので、現在配置でも基 準配置でも同じではないのですか？また、現在配置の構成則がわからないので、基準 配置の構成則を使うということは、近似が行われていると理解してよいですか？

「非線形ＣＡＥにおける解析」でここを担当した東北大学の寺田と申します．これは，私の言葉が過ぎたのか，足らなかったからのものです．申し訳ございません．
おっしゃる通り，構成則は材料固有のもので，配置が異なるからといって材料の性質を変えているものではありません．ただし，現在配置での構成則が分からないからではなく，多くの構成則が初期配置を参照する応力とひずみでモデルが作られているからです．そして，それを用いて「現在」の変形・応力状態を議論しようとすれば，現配置を参照する”真”応力などを用いることになるということです．ですから，固体の解析の定式化は応力などを参照する配置の変換が必要になるのです．同じことですが，今現在の応力状態を評価するためには，変形していない配置を参照する応力とひずみで提供されている構成モデルを今の配置（現在配置）に照らし直すという作業が伴います，ということを言いたかったのです．
ただし，仮想仕事式の配置変換は積分領域の変換で，それに伴って変数も変換するというだけのことで，構成則のみ個別に変換できるのであれば，どちらの配置で積分するのかは（力学を記述する意味では）本質的ではありません．むしろアルゴリズムに依存すると言った方がよいかも知れません．
言葉足らず，誤解をもたらす表現で申し訳ございませんでした．
また，2つ目のご質問の，「近似ではないか」とのご質問ですが，これはＮＯです．上記の説明から，現在の形態を参照しようと，過去のものだろうと同じ状態を表しており，形式的に異なるのは変数変換を行ったからに過ぎません．式の上での「近似」はないはずです．（もちろん，実験事実から構成モデルを作った際に入り込む近似は別です．）

質問２：構成則の客観性について（第 2 日目：概要）

コーシー応力の速度は客観性がないという説明で、「1 本の棒が９０度の剛体回転をしたら、コーシー応力の方向が変わり、速度の方向が変わるので客観性がない」とのことでしたが、応力を軸力とみれば、軸力の変化率は剛体回転しても変わらないわけで、客観性という意味がわからなくなっております。この場合の客観性とは座標系を固定して考えるという理解でよろしいでしょうか？

（回答）野口

上記の質問は非常に的を射ています。当日は少し極端な例を示したため、もう少し噛み砕きます。

１） 基本的にテンソルの客観性の議論と座標系は、直接は関係ありません。初日の講義にも出て来たように、座標系は観測者が自由にきめることが出来、それに応じてテンソルの成分が求められます。ここでの議論でもそれは同様です。ただ、実際に演算する時は何かしらの座標系で成分分解した方がわかりやすいし物理的にも明確になることがあります。そこで講義では、空間に固定した座標系で分解しました。この時 Cauchy 応力（速度）だけでなく、対応する構成則テンソルや変形速度テンソルも（演算の際は）同じ座標系で分解すると、テンソルの演算は、最終的にはいわゆるベクトルとマトリクスのかけ算で書くことができます。

２） さて棒の廻る話について、ここでは速度型の構成則を考えるものします。現時刻における速度勾配のテンソルは、京谷先生の資料３４頁を参照して、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{l} &\equiv \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} \\ \boldsymbol{l} &= \boldsymbol{d} + \boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{d} = \frac{\boldsymbol{l}+\boldsymbol{l}^T}{2}, &\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{l}-\boldsymbol{l}^T}{2} \end{aligned} \tag{1}$$

ここで、$\boldsymbol{d}$ は変形速度テンソル（通常のひずみに相当する）、$\boldsymbol{w}$ はスピンテンソルと呼ばれます。棒が回転を始める瞬間では、変形はなく（$\boldsymbol{d}=\mathbf{0}$）スピンだけです。

３） ここで、構成則のテンソルを仮に $\mathbf{C}$ とおきます。この時もし Cauchy 応力の速度と $\boldsymbol{d}$ の間に構成関係が成立したとすれば、

$$\dot{\sigma} = \mathbf{C}:\boldsymbol{d} \tag{2}$$

となりますが、いかなる固定座標系を用いても、$\boldsymbol{d}$ 自身がゼロですから、この Cauchy

応力速度はゼロでなければなりません。ところが、先の講義で示したように、Cauchy 応力は真応力ですから、常に棒の回転と共に Cauchy 応力テンソル自体も変化します。回転後の応力テンソルは、剛体回転テンソルを **R** とすれば

$$\sigma(t) = \mathbf{R}\sigma(0)\mathbf{R}^T \tag{3}$$

と書くことができます。これを時間微分して、t をゼロに漸近させると、

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\dot{\sigma}(t) &= \lim_{t\to 0}(\dot{\mathbf{R}}\sigma(0)\mathbf{R}^T + \mathbf{R}\sigma(0)\dot{\mathbf{R}}^T)\\ &= \boldsymbol{w}\sigma(0) + \sigma(0)\boldsymbol{w}^T\end{aligned} \tag{4}$$

となり、結局時刻 0 における Cauchy 応力速度は

$$\dot{\sigma}(t) = \boldsymbol{w}\sigma + \sigma\boldsymbol{w}^T \tag{5}$$

で表されます。すなわち、棒が廻るだけであっても、 Cauchy 応力速度はスピンの分だけ存在するわけです。従って、先に示した構成則は適用できないことになります。

4） そこで御質問にあるように、変形後も「軸力の変化」の効果のみを表せる応力速度テンソルを導入する必要があります。これが客観性のある応力速度です。（軸力を Cauchy 応力と考えること自体は問題ありませんが、速度をとる場合にはその軸の時間変化も含まれるということです。）この問題に限れば、棒の剛体回転に対してその速度がゼロとなる応力速度テンソルということになります。このようなテンソルは一つではないのですが、式(5)の左辺から右辺を引けば、ゼロとなる最も簡便なものは

$$\overset{\circ}{\sigma} = \dot{\sigma} - \boldsymbol{w}\sigma + \sigma\boldsymbol{w} \tag{6}$$

であることがわかります。ここで、式 (5) から(6)への変形においては $\boldsymbol{w}$ が反対称テンソルであることを利用しています。

5） 実は式 (6) は、いわゆる Jaumann 応力速度の定義式です。このような棒の問題だけでなく、むしろ大ひずみを考慮した弾塑性問題に広く使われています。先にも述べたように、このような客観速度の定義は一つではなく、他にも Green-Naghdi, Oldroyd, Cotter-Rivlin 速度等があり、それぞれがどのような意味を持つのかということは、非線形問題の中でも特に深い問題であり、また別の機会に紹介いたします。

以　上

質問3：異方性降伏条件式について（第2日目：講義A）

金属材料の降伏条件を試験片の実験結果にフィッティングするように決めると、YLD2000が現象をよく模擬できるなどの話がありましたが、それはあくまでもその形状やサイズの試験片の場合であり、我々の解析対象が、その材料は同じだが形状やサイズは試験片と異なる場合にも、試験片の構成則が利用できると考えていいのか疑問です。もしも、近似的に利用可能ということであれば、所詮近似なのだから簡単なMisesでも十分と思います。

（桑原先生より）
材料モデルですから，材料が同じであれば，当然どのような試験片形状（もしくは解析対象物の形状）であっても適用できます．YLD2000に限らず，どのような異方性降伏条件式を使うべきかは，解析結果に求める精度レベルによって決まると思います．
「加工荷重をしりたい」程度の要求でしたら確かにミーゼスで十分でしょう．しかし，自動車部品の製造において，スプリングバックや破断時期などをできるだけ精度よく予測したい場合などは，やはりその材料に適した異方性降伏条件式を使う必要があるでしょう．現に，最近のトヨタ，日産などの解析エンジニアは，異方性降伏条件式の重要性を指摘しています．

質問4：サンドイッチ構造のモデル化について（第2日目：講義C）

サンドイッチ構造をシェルでモデル化する場合には面外せん断変形を厳密に考慮したシェル要素が必要というのはわかりましたが、サンドイッチ効果なしとありの比較した講義資料の図が納得できません。サンドイッチ効果があっても左側の図にならないのでしょうか、右側の図は心材は曲げ変形しないように見えますし、表面材は上下ともに上面引張りで下面圧縮になっているようにみえます。それであっているのでしょうか？

一般的なサンドイッチ構造体では、表面材と心材の弾性比 $k=E_f/E_c$、厚さ比 $h=t_c/t_f$ の値は非常に大きく、100 以上の値をとるものが実用化されています。
このようなサンドイッチ構造体全体の曲げ変形挙動では、心材自身の曲げ剛性は無視することができ、表面材の面内剛性と心材の横せん断剛性が支配的になります。（このことは、参考文献 1),2),3)で展開されている複合梁理論に詳しく記載されていますので参考にしてください）

講義で使用した OHP のサンドイッチ構造体の変形模式図は、このことを示している図であり、サンドイッチ構造体全体の変形成分なかで、主に、表面材の曲げ変形と心材の横せん断変形で構成されていることを示したものです。

このような現象は、表面材と心材の弾性比 $k=E_f/E_c$、厚さ比 $h=t_c/t_f$ の値が大きいことが原因です。したがって、サンドイッチ構造体全体のたわみは、

$$w = w_b + w_s \tag{1}$$

と考えてよいことになります。ここで、w_b, w_s は曲げおよびせん断によるたわみを表わします。（参考文献 3)参考）

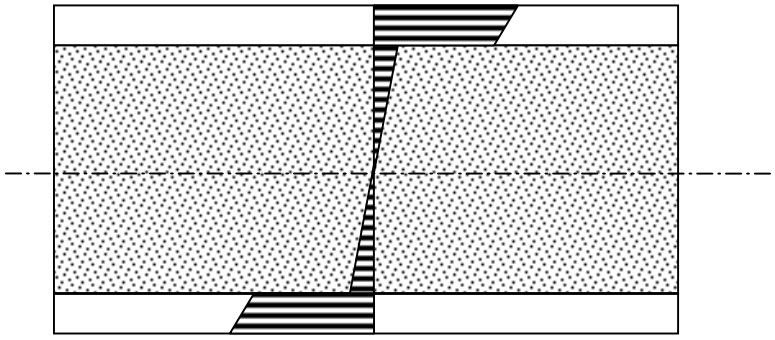
具体的には、幅 b_c のサンドイッチ梁で、両端単純支持（スパン L）、中央集中荷重（P）の場合には、

$$w = PL^3/48D + PL/4S \tag{2}$$

により与えられます。ただし、S はせん断剛性で $S=G_c \cdot t_c \cdot b_c$ がよく用いられています。

また、ご質問では、「表面材は上下ともに上面引張りで下面圧縮になっているようにみえる」とありましたが、そうではありません。

曲げの中立軸がサンドイッチ梁の中心に位置している場合には、下図のように垂直応力は分布します。



6．参考文献

1）島村昭治･宮入裕夫：“ サンドイッチ構造”，日刊工業新聞社（昭 49）

2）金原 勲，劔持 潔：日本複合材料学会誌，8，4 (1982)，150-158

3）劔持 潔：日本複合材料学会誌，4，1 (1978)，39-44