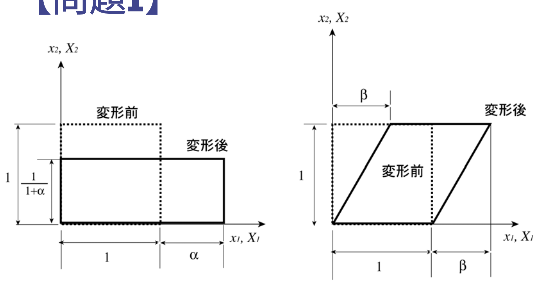
力学演習

第４期非線形ＣＡＥ勉強会　第１日目

担当：
東北大学　京谷孝史
東北大学　寺田賢二郎

演習問題の解答

【問題I】



(a) 一軸引張り　　(b) 単純せん断

(a) 一軸引張り

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{1+\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix}$$

(b) 単純せん断

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix}$$

運動(motion)

$$\boldsymbol{x} = \phi(\boldsymbol{X}, t), \quad \left(\because \boldsymbol{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}, \boldsymbol{X} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} \right)$$

（1）変形勾配テンソル

$$\boldsymbol{F}=\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{X}}=\begin{bmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3}\\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3}\\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3}\end{bmatrix}$$

＊定数成分になっている.
→ 一様変形

＊体積変化は無し
→ 非圧縮変形

$$dv = J\,dV = (\det \boldsymbol{F})dV$$

$$\because\ dv = dV \quad \Leftrightarrow \quad J=\det \boldsymbol{F}=1$$

(a) 一軸引張り

$$x_1=(1+\alpha)X_1,\ x_2=\frac{1}{1+\alpha}X_2,$$
$$x_3=X_3$$

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}1+\alpha & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{1+\alpha} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\det \boldsymbol{F}=(1+\alpha)\cdot\frac{1}{1+\alpha}\cdot 1-0\cdot 0=1$$

(b) 単純せん断

$$x_1=X_1+\beta X_2,\ x_2=X_2$$
$$x_3=X_3$$

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}1 & \beta & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\det \boldsymbol{F}=1\cdot 1\cdot 1-\beta\cdot 0=1$$

（2）右Cauchy-Greenテンソル，左Cauchy-Greenテンソル

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{U}^2=\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}$$ （右Cauchy-Greenテンソル）

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{V}^2=\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^T$$ （左Cauchy-Greenテンソル）

(a) 一軸引張り

$$\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^T=\begin{bmatrix}(1+\alpha)^2 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{(1+\alpha)^2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\boldsymbol{F}^2$$

$$\therefore\ \boldsymbol{C}=\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}(1+\alpha)^2 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{(1+\alpha)^2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

(b) 単純せん断

$$\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}1 & \beta & 0\\ \beta & 1+\beta^2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^T=\begin{bmatrix}1+\beta^2 & \beta & 0\\ \beta & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1 & \beta & 0\\ \beta & 1+\beta^2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1+\beta^2 & \beta & 0\\ \beta & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

（3）変形勾配テンソルの極分解

$F = RU$ （右極分解）

$F = VR$ （左極分解）

$$U = \left(F^T F\right)^{\frac{1}{2}},\; V = \left(FF^T\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$R = FU^{-1} = V^{-1}F$$

$$R^T R = RR^T = I$$

$$\left[F^T F\right]^{\frac{1}{2}}\left[F^T F\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$= [T_U]^T[\sqrt{\lambda}][T_U][T_U]^T[\sqrt{\lambda}][T_U]$$
$$= [T_U]^T[\sqrt{\lambda}][I][\sqrt{\lambda}][T_U] \quad (\because [T_U][T_U]^T = [I])$$
$$= [T_U]^T[\lambda][T_U]$$
$$= \left[F^T F\right]$$

1）$U = \left(F^T F\right)^{\frac{1}{2}},\; V = \left(FF^T\right)^{\frac{1}{2}}$ を求める

a) 固有値と固有ベクトルを求めて対角化

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{bmatrix} = [T_U]\left[F^T F\right][T_U]^T$$

$$\begin{bmatrix} \mu_1 & \\ & \mu_2 \end{bmatrix} = [T_V]\left[FF^T\right][T_V]^T$$

b) 平方根を求めて元の座標に戻す.

$$\left[F^T F\right]^{\frac{1}{2}} = [T_U]^T\begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & \\ & \sqrt{\lambda_2} \end{bmatrix}[T_U]$$

$$\left[FF^T\right]^{\frac{1}{2}} = [T_V]^T\begin{bmatrix} \sqrt{\mu_1} & \\ & \sqrt{\mu_2} \end{bmatrix}[T_V]$$

2）$R = FU^{-1} = V^{-1}F$ を求める

(a) 一軸引張り

$$F^T F = FF^T = \begin{bmatrix} (1+\alpha)^2 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{(1+\alpha)^2} \end{bmatrix} = F^2$$

・対角化の必要なし. 固有値そのもの

$$U = V = \begin{bmatrix} 1+\alpha & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{1+\alpha} \end{bmatrix} = F$$

・平方根をとる. これで分解は終わり.

$$\therefore\; F = U = V$$

$$U^{-1} = V^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1+\alpha} & 0 \\ 0 & 1+\alpha \end{bmatrix}$$

・実際, R を求めてみれば・・・・・

$$R = FU^{-1} = \begin{bmatrix} 1+\alpha & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{1+\alpha} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{1}{1+\alpha} & 0 \\ 0 & 1+\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= I$$

・確かに $R = I$（恒等テンソル）である.

（4）Green-Lagrane，Euler-Almansiのひずみテンソル

(a) 一軸引張り

$$\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^T=\begin{bmatrix}(1+\alpha)^2 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{(1+\alpha)^2}\end{bmatrix}=\boldsymbol{F}^2$$

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}(1+\alpha)^2 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{(1+\alpha)^2}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{I})=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\alpha(\alpha+2) & 0\\ 0 & -\dfrac{\alpha(\alpha+2)}{(1+\alpha)^2}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{e}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{b}^{-1}\right)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\dfrac{\alpha(\alpha+2)}{(1+\alpha)^2} & 0\\ 0 & -\alpha(\alpha+2)\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{b}^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{(1+\alpha)^2} & 0\\ 0 & (1+\alpha)^2\end{bmatrix}$$

(b) 単純せん断

$$\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}1 & \beta\\ \beta & 1+\beta^2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^T=\begin{bmatrix}1+\beta^2 & \beta\\ \beta & 1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1 & \beta\\ \beta & 1+\beta^2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1+\beta^2 & \beta\\ \beta & 1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{I})=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & \beta\\ \beta & \beta^2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{e}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{b}^{-1}\right)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & \beta\\ \beta & -\beta^2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{b}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -\beta\\ -\beta & 1+\beta^2\end{bmatrix}$$

(＊)左右Cauchy-Greenテンソルの対角化

(b) 単純せん断($\beta=\frac{1}{2}$ として)

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{U}^2=\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}$$

・固有方程式を解いて固有値を求める.

$$\det(\boldsymbol{C}-\lambda\boldsymbol{I})=\det\begin{bmatrix}1-\lambda & 1/2\\ 1/2 & 5/4-\lambda\end{bmatrix}=\lambda^2-\frac{9}{4}\lambda+1=0$$

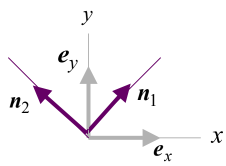
$$\therefore\quad \lambda=\frac{9\pm\sqrt{17}}{8}\qquad(\lambda=1.6404,\ 0.6096)$$

・固有ベクトルを求める.

$$\begin{bmatrix}1-\lambda & 1/2\\ 1/2 & 5/4-\lambda\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}n_x\\ n_y\end{Bmatrix}=\boldsymbol{0},\quad (n_x)^2+(n_y)^2=1$$

$$\lambda_1=\frac{9+\sqrt{17}}{8}=1.6404\ \rightarrow\ \boldsymbol{n}_1=\begin{Bmatrix}0.6154\\ 0.7882\end{Bmatrix}$$

$$\lambda_2=\frac{9-\sqrt{17}}{8}=0.6096\ \rightarrow\ \boldsymbol{n}_2=\begin{Bmatrix}-0.7882\\ 0.6154\end{Bmatrix}$$



・対角化行列

→ 固有方向への座標変換行列

	旧基底 $\boldsymbol{e}_x$	$\boldsymbol{e}_y$
新基底 $\boldsymbol{n}_1$	方向余弦（内積）	
$\boldsymbol{n}_2$		

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}0.6154 & 0.7882\\ -0.7882 & 0.6154\end{bmatrix}\cong\begin{bmatrix}\cos 52^\circ & \sin 52^\circ\\ -\sin 52^\circ & \cos 52^\circ\end{bmatrix}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{T}\boldsymbol{C}\boldsymbol{T}^T=\begin{bmatrix}\lambda_1 & \\ & \lambda_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.6404 & 0\\ 0 & 0.6096\end{bmatrix}$$

$$C = F^T F = U^2$$

$$\lambda_1 = \frac{9+\sqrt{17}}{8} = 1.6404 \rightarrow \boldsymbol{n}_1 = \begin{Bmatrix} 0.6154 \\ 0.7882 \end{Bmatrix}$$

$$\lambda_2 = \frac{9-\sqrt{17}}{8} = 0.6096 \rightarrow \boldsymbol{n}_2 = \begin{Bmatrix} -0.7882 \\ 0.6154 \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{TCT}^T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.6404 & 0 \\ 0 & 0.6096 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 0.6154 & 0.7882 \\ -0.7882 & 0.6154 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} \cos 52^\circ & \sin 52^\circ \\ -\sin 52^\circ & \cos 52^\circ \end{bmatrix}$$

$$b = FF^T = V^2$$

$$\lambda_1 = \frac{9+\sqrt{17}}{8} = 1.6404 \rightarrow \boldsymbol{n}_1 = \begin{Bmatrix} 0.7882 \\ 0.6154 \end{Bmatrix}$$

$$\lambda_2 = \frac{9-\sqrt{17}}{8} = 0.6096 \rightarrow \boldsymbol{n}_2 = \begin{Bmatrix} -0.6154 \\ 0.7882 \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{TbT}^T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.6404 & 0 \\ 0 & 0.6096 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 0.7882 & 0.6154 \\ -0.6154 & 0.7882 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} \cos 38^\circ & \sin 38^\circ \\ -\sin 38^\circ & \cos 38^\circ \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{U}^2 = \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F} = \boldsymbol{C}$$

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{T}^T \begin{bmatrix} \sqrt{1.6404} & 0 \\ 0 & \sqrt{0.6096} \end{bmatrix} \boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 0.9701 & 0.2425 \\ 0.2425 & 1.0914 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{T} \cong \begin{bmatrix} \cos 52^\circ & \sin 52^\circ \\ -\sin 52^\circ & \cos 52^\circ \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{U}^{-1} = \boldsymbol{T}^{-1} \begin{bmatrix} \sqrt{1.6404} & 0 \\ 0 & \sqrt{0.6096} \end{bmatrix}^{-1} \boldsymbol{T}^{-T} = \boldsymbol{T}^T \begin{bmatrix} \sqrt{1.6404}^{-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{0.6096}^{-1} \end{bmatrix} \boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 1.0914 & -0.2425 \\ -0.2425 & 0.9701 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{U}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.0914 & -0.2425 \\ -0.2425 & 0.9701 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9701 & 0.2425 \\ -0.2425 & 0.9701 \end{bmatrix}$$

- 対称である
- 固有値は同じ
- 固有方向が違う

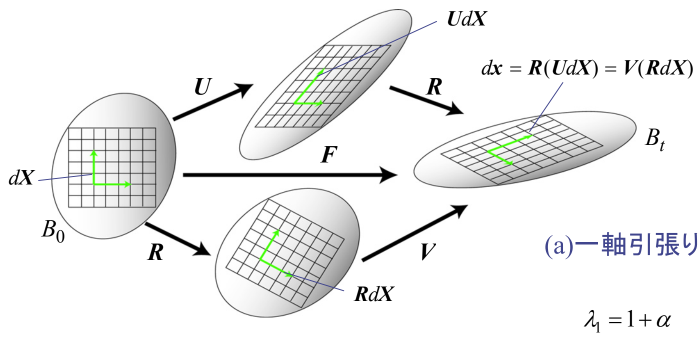
$$\boldsymbol{V}^2 = \boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^T = \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{T}^T \begin{bmatrix} \sqrt{1.6404} & 0 \\ 0 & \sqrt{0.6096} \end{bmatrix} \boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 1.0914 & 0.2425 \\ 0.2425 & 0.9701 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{T} \cong \begin{bmatrix} \cos 38^\circ & \sin 38^\circ \\ -\sin 38^\circ & \cos 38^\circ \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{V}^{-1} = \boldsymbol{T}^{-1} \begin{bmatrix} \sqrt{1.6404} & 0 \\ 0 & \sqrt{0.6096} \end{bmatrix}^{-1} \boldsymbol{T}^{-T} = \boldsymbol{T}^T \begin{bmatrix} \sqrt{1.6404}^{-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{0.6096}^{-1} \end{bmatrix} \boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 0.9701 & -0.2425 \\ -0.2425 & 1.0914 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 0.9701 & -0.2425 \\ -0.2425 & 1.0914 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9701 & 0.2425 \\ -0.2425 & 0.9701 \end{bmatrix}$$



(a)一軸引張りのストレッチ

$$\lambda_1 = 1+\alpha \qquad \lambda_2 = \frac{1}{1+\alpha}$$

(b)単純せん断のストレッチ

$$\lambda_1 = \left(\frac{\beta^2 + 2 + \sqrt{\beta^2 + 4\beta}}{2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\lambda_2 = \left(\frac{\beta^2 + 2 - \sqrt{\beta^2 + 4\beta}}{2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

U と ***V***

・直交する2方向に引き伸ばす効果を表す

〇引き伸ばしの大きさ(固有値)は等しい
→ 固有値をストレッチ(stretch)と呼ぶ.

×直交2方向が異なる

＊ストレッチの自然対数が対数ひずみ

【問題II】

解析における「構成則」の役割 ー 非圧縮超弾性体 ー

Input: ***F*** ⇒ 非圧縮超弾性構成則
（弾性エネルギーを
ポテンシャルとしてひずみに対する
勾配を応力と定義する）
⇒ Output: σ

例：ゴムの材料モデル
ここでは、Mooney-Rivlinモデル

- 観測者に依らない
  - 客観性の原理
- 選択した座標系に依存しない
  - 変形をどの座標系の成分で与えても同一の弾性エネルギー

⇒ 「ひずみの不変量」による記述

(1)

変形の変数 ⇨ 右Cauchy-Greenのひずみテンソルの不変量

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{12} & C_{33} & C_{23} \\ C_{13} & C_{23} & C_{13} \end{bmatrix}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F} \qquad \boldsymbol{E}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{I})$$

$I_1=\mathrm{tr}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}:\boldsymbol{I}$ ← 垂直ひずみによるエネルギーのようなもの

$I_2=\frac{1}{2}\left(I_1^2\text{-}\mathrm{tr}\boldsymbol{C}^2\right)=\frac{1}{2}\left(I_1^2\text{-}\boldsymbol{C}:\boldsymbol{C}\right)$ ← せん断ひずみによるエネルギーのようなもの

$I_3=\det\boldsymbol{C}=J^2$ ← 圧縮・伸張変形によるエネルギーのようなもの

$$I_1=\mathrm{tr}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}:\boldsymbol{I}=C_{pp}=C_{11}+C_{22}+C_{33}=\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2$$

$$I_2=\frac{1}{2}\left(I_1^2-\mathrm{tr}\boldsymbol{C}^2\right)=\frac{1}{2}\left(I_1^2-\boldsymbol{C}:\boldsymbol{C}\right)=\frac{1}{2}\left(C_{pp}^2-C_{pq}C_{pq}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(C_{11}+C_{22}+C_{33}\right)^2-\left(C_{11}^2+C_{22}^2+C_{33}^2+2C_{12}C_{12}+2C_{23}C_{23}+2C_{31}C_{31}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2\right)^2-\left(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2\right)\right] \quad =\lambda_1^2\lambda_2^2+\lambda_2^2\lambda_3^2+\lambda_3^2\lambda_1^2$$

$$I_3=\det\boldsymbol{C}=J^2=(\lambda_1\lambda_2\lambda_3)^2=1$$

弾性エネルギー関数：

$$\mathcal{W}(I_1,I_2)=c_{10}\left(I_1-3\right)+c_{01}\left(I_2-3\right) \text{ and } I_3=1$$

（Mooney-Rivlinモデル）

c_{10}, c_{01} は材料パラメータ

構成則〔第2Piola-Kirchhoff応力～Green-Lagrangeひずみ〕

Input: $\boldsymbol{F}$ ⇨

$$\boldsymbol{S}=\frac{\partial\mathcal{W}(I_1,I_2)}{\partial\boldsymbol{E}}+pJ\boldsymbol{C}^{-1}$$

$$=2\frac{\partial\mathcal{W}(I_1,I_2)}{\partial\boldsymbol{C}}+pJ\boldsymbol{C}^{-1}$$

$$\boldsymbol{S}\Rightarrow\boldsymbol{\sigma}$$

⇨ Output: $\boldsymbol{\sigma}$

(2)

構成則〔第2Piola-Kirchhoff応力～Green-Lagrangeひずみ〕

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{S} &= \frac{\partial W(I_1, I_2)}{\partial \boldsymbol{E}} + pJ\boldsymbol{C}^{-1} \\
&= \frac{\partial W(I_1, I_2)}{\partial \boldsymbol{C}} : \frac{\partial \boldsymbol{C}}{\partial \boldsymbol{E}} + pJ\boldsymbol{C}^{-1} \\
&= 2\frac{\partial W(I_1, I_2)}{\partial \boldsymbol{C}} + pJ\boldsymbol{C}^{-1} \\
&= 2\left(\frac{\partial W(I_1, I_2)}{\partial I_1}\frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{C}} + \frac{\partial W(I_1, I_2)}{\partial I_2}\frac{\partial I_2}{\partial \boldsymbol{C}}\right) + pJ\boldsymbol{C}^{-1} \\
&= 2\left(c_{10} + c_{01}I_1\right)\boldsymbol{I} - 2c_{01}\boldsymbol{C} + pJ\boldsymbol{C}^{-1}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{C}} = \boldsymbol{I}$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial \boldsymbol{C}} = I_1\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C}$$

$$\frac{\partial I_3}{\partial \boldsymbol{C}} = I_3\boldsymbol{C}^{-1}$$

(3)

構成則〔第1Piola-Kirchhoff応力～変形勾配〕

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P} &= \boldsymbol{F}\boldsymbol{S} \\
&= \boldsymbol{F}\left(2\left(c_{10} + c_{01}I_1\right)\boldsymbol{I} - 2c_{01}\boldsymbol{C} + pJ\boldsymbol{C}^{-1}\right) \\
&= \boldsymbol{F}\left(2\left(c_{10} + c_{01}I_1\right)\boldsymbol{I} - 2c_{01}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F} + pJ\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}\right) \\
&= 2\left(c_{10} + c_{01}I_1\right)\boldsymbol{F} - 2c_{01}\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F} + pJ\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}
\end{aligned}$$

構成則〔Kirchhoff応力～Euler-Almansiひずみ〕

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\tau} &= \boldsymbol{F}\boldsymbol{S}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \\
&= \boldsymbol{F}\left(2\left(c_{10} + c_{01}I_1\right)\boldsymbol{I} - 2c_{01}\boldsymbol{C} + pJ\boldsymbol{C}^{-1}\right)\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \\
&= \boldsymbol{F}\left(2\left(c_{10} + c_{01}I_1\right)\boldsymbol{I} - 2c_{01}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F} + pJ\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \\
&= 2\left(c_{10} + c_{01}I_1\right)\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} - 2c_{01}(\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}) + pJ\boldsymbol{I} \\
&= 2\left(c_{10} + c_{01}I_1\right)\boldsymbol{b} - 2c_{01}\boldsymbol{b}^2 + pJ\boldsymbol{I}
\end{aligned}$$

(4)

一軸引張の変形

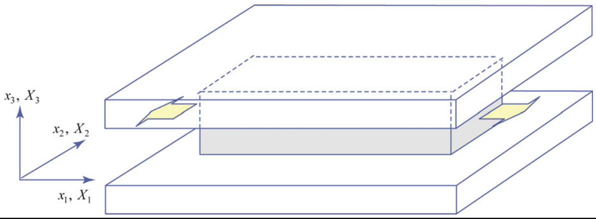
変形の状態を表す変数：
(問題Iの一様引っ張り変形)

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}1+\alpha & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{1+\alpha} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}(1+\alpha)^2 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{(1+\alpha)^2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\boldsymbol{b}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{C}^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{(1+\alpha)^2} & 0 & 0\\ 0 & (1+\alpha)^2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

力学的に期待される " 真 " 応力状態

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma}=\begin{bmatrix}\sigma_{11} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_{33}\end{bmatrix}$$



右Cauchy-Greenひずみテンソルの不変量　(問題I：一様引張)

$$I_1=\mathrm{tr}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}:\boldsymbol{I}=C_{pp}=C_{11}+C_{22}+C_{33}=\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2$$
$$=(1+\alpha)^2+\frac{1}{(1+\alpha)^2}+1=\frac{(1+\alpha)^4+(1+\alpha)^2+1}{(1+\alpha)^2}$$

$$I_2=\frac{1}{2}\left(I_1^2\text{-}\mathrm{tr}\boldsymbol{C}^2\right)=\frac{1}{2}\left(I_1^2\text{-}\boldsymbol{C}:\boldsymbol{C}\right)=\frac{1}{2}\left(C_{pp}^2-C_{pq}C_{pq}\right)$$
$$=\lambda_1^2\lambda_2^2+\lambda_2^2\lambda_3^2+\lambda_3^2\lambda_1^2$$
$$=1+\frac{1}{(1+\alpha)^2}+(1+\alpha)^2=\frac{(1+\alpha)^4+(1+\alpha)^2+1}{(1+\alpha)^2}$$

$$I_3=\det\boldsymbol{C}=J^2=(\lambda_1\lambda_2\lambda_3)^2=(1+\alpha)^2\cdot\frac{1}{(1+\alpha)^2}=1$$

これらを構成則に代入
$c_{10}=5,\ c_{01}=3$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{S}=2\left(c_{10}+c_{01}I_1\right)\boldsymbol{I}-2c_{01}\boldsymbol{C}+p\boldsymbol{C}^{-1}$$
$$=\left(10+6I_1\right)\boldsymbol{I}-6\boldsymbol{C}+p\boldsymbol{C}^{-1}$$

第2Piola-Kirchhoff応力　（問題I：一様引張）

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{bmatrix} = \left(10 + 6\frac{(1+\alpha)^4 + (1+\alpha)^2 + 1}{(1+\alpha)^2}\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} (1+\alpha)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(1+\alpha)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + p\begin{bmatrix} \frac{1}{(1+\alpha)^2} & 0 & 0 \\ 0 & (1+\alpha)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 + 6\frac{(1+\alpha)^4 + (1+\alpha)^2 + 1}{(1+\alpha)^2} - 6(1+\alpha)^2 + \frac{p}{(1+\alpha)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 10 + 6\frac{(1+\alpha)^4 + (1+\alpha)^2 + 1}{(1+\alpha)^2} - \frac{6}{(1+\alpha)^2} + p(1+\alpha)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 + 6\frac{(1+\alpha)^4 + (1+\alpha)^2 + 1}{(1+\alpha)^2} - 6 + p \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 + \frac{6(1+\alpha)^2 + p + 6}{(1+\alpha)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 10 + 6\frac{(1+\alpha)^4 + (1+\alpha)^2}{(1+\alpha)^2} + p(1+\alpha)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 + p + 6\frac{(1+\alpha)^4 + 1}{(1+\alpha)^2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{16(1+\alpha)^2 + p + 6}{(1+\alpha)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 16 + (p+6)(1+\alpha)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 + p + 6\frac{(1+\alpha)^4 + 1}{(1+\alpha)^2} \end{bmatrix}$$

第1Piola-Kirchhoff応力　（問題I：一様引張）

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{S}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 + \frac{6(1+\alpha)^2 + p + 6}{(1+\alpha)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 16 + (p+6)(1+\alpha)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 + p + 6\frac{(1+\alpha)^4 + 1}{(1+\alpha)^2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{16(1+\alpha)^2 + p + 6}{1+\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{16 + (p+6)(1+\alpha)^2}{1+\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 10 + p + 6\frac{(1+\alpha)^4 + 1}{(1+\alpha)^2} \end{bmatrix}$$

$\tau = J\sigma = FSF^{\mathrm{T}} = PF^{\mathrm{T}}$ Kirchhoff応力

$$
= \begin{bmatrix} 10(1+\alpha)+\dfrac{6(1+\alpha)^2+p+6}{1+\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{16+(p+6)(1+\alpha)^2}{1+\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 10+p+6\dfrac{(1+\alpha)^4+1}{(1+\alpha)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{1+\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 10(1+\alpha)^2+6(1+\alpha)^2+p+6 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{16+(p+6)(1+\alpha)^2}{(1+\alpha)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 10+p+6\dfrac{(1+\alpha)^4+1}{(1+\alpha)^2} \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 16(1+\alpha)^2+p+6 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{16+(p+6)(1+\alpha)^2}{(1+\alpha)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 10+p+6\dfrac{(1+\alpha)^4+1}{(1+\alpha)^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}
$$

$\sigma_{22} = 0$ でなければならない

一軸引張における真応力

引張方向の垂直応力

$$
\begin{cases} S_{11} = \dfrac{16(1+\alpha)^2+p+6}{(1+\alpha)^2} \\ P_{11} = \dfrac{16(1+\alpha)^2+p+6}{1+\alpha} \\ \sigma_{11} = 16(1+\alpha)^2+p+6 \end{cases}
$$

横方向の直応力

$$
\begin{cases} S_{22} = 16+(p+6)(1+\alpha)^2 \\ P_{22} = \dfrac{16+(p+6)(1+\alpha)^2}{1+\alpha} \\ \sigma_{22} = \dfrac{16+(p+6)(1+\alpha)^2}{(1+\alpha)^2} \end{cases}
$$

圧力は局所的な “ 材料の挙動 ”
（＝変形から応力が決まる仕掛け）
だけでは p は不定

つり合い式と境界条件を満足する
ことを考慮する（境界値問題
の解が必要）

$S_{22} = P_{22} = \sigma_{22} = 0$

$$
p = -\frac{16+6(1+\alpha)^2}{(1+\alpha)^2}
$$

境界値問題の解として得られた変形
＝　つり合い状態にある
＝　つり合い式と境界条件を満たす
＝　一様な２軸応力状態にある

(5) :宿題

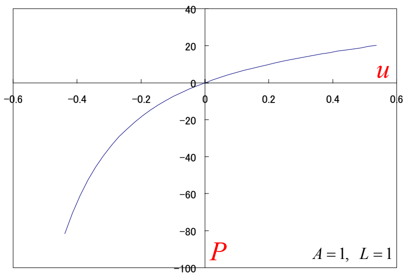
公称応力＝第１Piola-Kirchhoff応力の引張方向成分（11成分）：P_{11}

$$\frac{P}{A} = P_{11} = \frac{16(1+\alpha)^2 + p + 6}{1+\alpha}$$

代入

$$p = -\frac{16 + 6(1+\alpha)^2}{(1+\alpha)^2}$$

$$\frac{P}{A} = 16\frac{(1+\alpha)^4 - 1}{(1+\alpha)^3}$$



ストレッチの定義

$$\lambda_1 = 1 + \alpha = \frac{L+u}{L} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{u}{L}$$

$$P = 16A\frac{\left(1+\dfrac{u}{L}\right)^4 - 1}{\left(1+\dfrac{u}{L}\right)^3}$$

：計測データ P と u による構成関係式