演習問題（１日目）

非圧縮性材料の変形と構成則に関する以下の問題 I，II に答えよ．ただし，厚み方向の変形はないものとする．

問題 I　図のような一様変形（一軸引張り，単純せん断）を考えると，変形に関する運動（motion）は，α と β を任意の実数としてそれぞれ次のように与えられる．

(a)　一軸引張　$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\alpha & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{1+\alpha} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}$$

(b)　単純せん断　$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}$$

以下の問いに答えなさい．

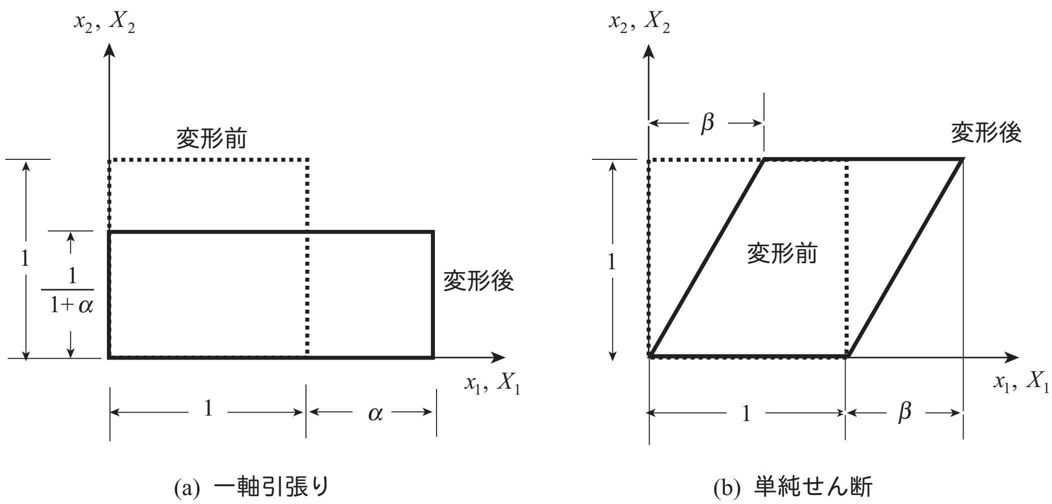

図 1: 運動の状態

(1) それぞれの変形について変形勾配テンソル（Deformation gradient）$\boldsymbol{F}$ を計算せよ．

$$\boldsymbol{F} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{X}}; \quad [F_{iJ}] = \left[\frac{\partial x_i}{\partial X_J}\right] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial X_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial X_2} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial X_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial X_2} \end{bmatrix}$$

(2) それぞれの変形について，右 Cauchy-Green テンソル $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}$，左 Cauchy-Green テンソル $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}$ を求めよ．

(3) 一軸引張りの変形勾配テンソルについて左右の極分解を行え．[1]ただし，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= \boldsymbol{RU} = \boldsymbol{VR} \quad (\rightarrow \boldsymbol{R} = \boldsymbol{FU}^{-1} = \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{F}),\\
\boldsymbol{U} &= \boldsymbol{C}^{1/2},\ \boldsymbol{V} = \boldsymbol{b}^{1/2},\\
\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R} &= \boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I}
\end{aligned}
$$

(4) Green-Lagrange のひずみテンソル $\boldsymbol{E}$，Euler-Almansi のひずみテンソル$\boldsymbol{e}$を求めよ．

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F} - \boldsymbol{I}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{I})\\
\boldsymbol{e} &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{-1}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{b}^{-1})
\end{aligned}
$$

問題 II　構成則に関する以下の設問に答えよ．

(1) 左 Cauchy-Green テンソル $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}$ の不変量

$$
\begin{aligned}
&I_1 = \mathrm{tr}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C} : \boldsymbol{I}\\
&I_2 = \frac{1}{2}\left(I_1^2 - \mathrm{tr}\boldsymbol{C}^2\right)\\
&(I_3 = \det \boldsymbol{C} = (\det \boldsymbol{F})^2 = J^2 = 1)
\end{aligned}
$$

について，$\boldsymbol{C}$ の固有値 λ_1^2，λ_2^2，λ_3^2 で表せ．

(2) 非圧縮性のゴム材を考え，弾性エネルギー関数が次式で与えられているものとする．

$$
\mathcal{W}(I_1, I_2) = c_{10}\,(I_1 - 3) + c_{01}\,(I_2 - 3) \quad \text{and} \quad I_3 = 1 \quad \text{（Mooney-Rivlin モデル）}
$$

このとき，$c_{10} = 5.0$，$c_{01} = 3.0$ として，以下の構成則を具体的な形に展開せよ．

$$
\boldsymbol{S} = \frac{\partial \mathcal{W}(I_1, I_2)}{\partial \boldsymbol{E}} + pJ\boldsymbol{C}^{-1}
$$

ここで，p は圧力，$\boldsymbol{S}$ は第 2Piola-Kirchhoff 応力テンソル，$\boldsymbol{E}$は Green-Lagrange のひずみテンソルであり，不変量の偏微分に関しては以下の式を利用せよ．

$$
\frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{C}} = \boldsymbol{I}, \quad \frac{\partial I_2}{\partial \boldsymbol{C}} = I_1\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C}, \quad \left(\frac{\partial I_3}{\partial \boldsymbol{C}} = I_3\boldsymbol{C}^{-1}\right)
$$

(3) (2) で求めた第 2Piola-Kirchhoff 応力テンソル $\boldsymbol{S}$ による構成則の式を，第 1Piola-Kirchhoff 応力テンソル $\boldsymbol{P}$，Kirchhoff 応力テンソル $\boldsymbol{\tau}$，Cauchy 応力テンソル $\boldsymbol{\sigma}$ に変換して求めよ．ただし，$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{FS}$, $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{FSF}^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J}\boldsymbol{\tau}$ である．なお，$\boldsymbol{\tau}$，$\boldsymbol{\sigma}$ については $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{FF}^{\mathrm{T}}$ に置き換えて答えよ．

(4) 問題 I の一軸引張の変形状態を考え，設問 (2)，(3) で求めた各応力テンソルの成分を α の関数として表せ．

(5) 【宿題】供試体の測点間の初期形状が，長さが L，断面積が A の直方体を仮定して，問題 I の変形を与える．このとき，ロードセルの測定荷重を P，測点間の変位を u として，上で求めた構成則を P と u の関係として与えなさい．

[1]単純せん断については Power Point より解説する．