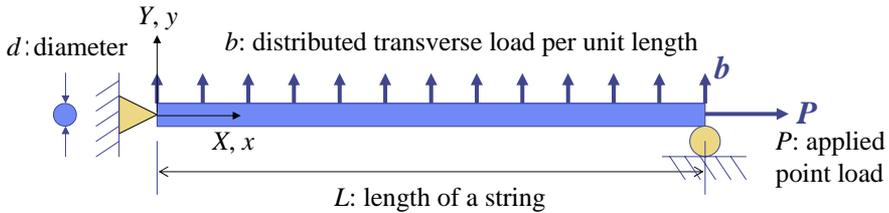


演習問題

細長いひも状の構造物



面内におのみ変形すると仮定

1

変形後の物質点の座標

$$\begin{cases} x = X + u(X) \\ y = Y + v(X) \\ z = Z \end{cases} \quad \text{運動の記述}$$

第二Piola-KirchhoffテンソルSとGreen-Lagrangeの歪テンソルEには、線形の関係式

$$\mathbf{S} = \mathbf{DE} \quad \text{構成則}$$

与えられている

- この変形場でのGreen-Lagrangeの歪テンソルEを求めよ。
京谷先生講義 p20 & 28
- このひも状の構造物は、軸方向の直応力 S^X のみが非ゼロであると仮定し、有限要素解析に必要な仮想仕事の原理に従った基本式を求めよ。
寺田先生講義 p10

2

- 3) ひも状の構造物を N_E 個の同じ長さを持つ線要素に分割し、各要素内で変位成分 u, v を 1 次と 2 次のパラメトリック座標 ξ の多項式と仮定し、要素内の座標とパラメトリック座標の間に $X = X_{e1}(1 - \xi)/2 + X_{e2}(1 + \xi)/2$ という関係式が成り立つとして、(2) で求めた基本式を離散化し、有限要素法に基づく離散化された釣り合い式を求めよ。
- 4) < 宿題 > 適当な数値、例えば、 $D^{1111} = 5\text{GPa}$, $L = 50\text{cm}$, $d = 2\text{mm}$ のひも状の構造物に対して、 $b = 10\text{kg/m}$ 程度の荷重をかけたとき、3 ケースの引っ張り荷重 $P = 1\text{kg}$, 10kg , 20kg に対する、ひも状の構造物の最大変位を有限要素法で求めなさい。このとき、自前のプログラムを書いて求めても、また市販ソフトや、インターネットで入手可能なソフトを使い、変位を求めても良いものとする。ただし、いずれの場合にも、求めた答えが「正しい」ことを説明せよ。

1) Green-Lagrangeの歪テンソル

講義1-1”力学の基礎p20 & 28”から

変形後の物質点の座標

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 1 + du/dX & 0 & 0 \\ dv/dX & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} x = X + u(X) \\ y = Y + v(X) \\ z = Z \end{cases}$$

$$E_X = \frac{du}{dX} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{du}{dX} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dX} \right)^2 \right]$$

鉛直(面外)方向のたわみにより発生する軸(面内)方向のひずみ

$$E_{XY} = \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dX} + \frac{du}{dY} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dX} \frac{du}{dY} + \frac{dv}{dX} \frac{dv}{dY} \right) = \frac{1}{2} \frac{dv}{dX}$$

引張り力 P が小さい場合、軸方向のひずみは小さいが、ひもが自重でたわむように、鉛直方向に大きく剛体回転をするので、歪歪に含まれる高次の非線形項 $(du/dX)^2$ は、回転を表すために必要(講義1-1: p29 & 30)。

2) 構成則

応力とひずみの関係式

$$S^X = D^{1111}E_X + \underbrace{D^{1112}}_{\approx 0}E_{XY}$$

$$S^{XY} = \underbrace{D^{1211}}_{=D^{1112}\approx 0}E_X + D^{1212}E_{XY}$$

等方性材料を仮定

$$D^{1112} = D^{1211} = 0$$

$$D^{1111} = E \quad \text{縦弾性係数}$$

$$D^{1212} = \kappa G \quad \text{横弾性係数}$$

κ は断面を考慮したせん断補正係数:ひも状の構造物では、 $\kappa \approx 0$

→ “軸方向の直応力 S^X のみが非ゼロであると仮定”⁵

2) 仮想仕事の原理 1

講義1-2”力学と解析p10”から(等方性材料を仮定)

$$\begin{aligned} \text{内部仕事量: } \delta U &= \int_V \delta \mathbf{E} : \mathbf{S} dV = \int_0^L \int_A (\delta E_X S^X + 2\delta E_{XY} S^{XY}) dAdX \\ &= \int_0^L (\delta E_X EE_X + 2\delta E_{XY} \kappa GE_{XY}) AdX \end{aligned}$$

$$\text{外部仕事量: } \delta W = \int_0^L \delta v b dX + \delta u(L)P$$

$$\longrightarrow \int_0^L (\delta E_X D^{1111}E_X + 2\delta E_{XY} D^{1212}E_{XY}) AdX = \int_0^L \delta v b dX + \delta u(L)P, \quad \forall \delta u, \delta v$$

$$\text{境界条件 } \delta u(0) = 0, \quad \delta v(0) = \delta v(L) = 0$$

2) 仮想仕事の原理2

前の仮想仕事の式にGreen-Lagrange歪とその変分

$$E_x = u' + \frac{1}{2}u'^2 + \frac{1}{2}v'^2, \quad \delta E_x = \delta u' + u'\delta u' + v'\delta v'$$

$$E_{xy} = \frac{1}{2}v', \quad \delta E_{xy} = \frac{1}{2}\delta v'$$

を代入すると

$$\begin{aligned} & \int_0^L (\delta u' + u'\delta u' + v'\delta v') EA \left(u' + \frac{1}{2}u'^2 + \frac{1}{2}v'^2 \right) dX + \int_0^L \delta v' \kappa GA v' dX \\ & = \int_0^L \delta v b dX + \delta u(L)P, \quad \forall \delta u, \delta v \end{aligned}$$

ここで $N_x^p = EA \left(u' + \frac{1}{2}u'^2 + \frac{1}{2}v'^2 \right) = \int_A S^x dA$ Stress resultant

7

2) 仮想仕事の原理3

更に展開すると

$$\begin{aligned} & \int_0^L \delta u' N_x^p dX + \int_0^L \delta u' N_x^p u' dX + \int_0^L \delta v' N_x^p v' dX + \int_0^L \delta v' \kappa GA v' dX \\ & = \int_0^L \delta v b dX + \delta u(L)P, \quad \forall \delta u, \delta v \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_0^L \delta u' N_x^p (1+u') dX + \int_0^L \delta v' (N_x^p + \kappa GA) v' dX = \int_0^L \delta v b dX + \delta u(L)P, \quad \forall \delta u, \delta v$$

それぞれの任意の仮想変位 δu と δv について成立するので、

$$\Rightarrow \int_0^L \delta u' N_x^p (1+u') dX = \delta u(L)P, \quad \forall \delta u \text{ s.t. } \delta u(0)=0$$

$$\Rightarrow \int_0^L \delta v' (N_x^p + \kappa GA) v' dX = \int_0^L \delta v b dX, \quad \forall \delta v \text{ s.t. } \delta v(0)=\delta v(L)=0$$

変位に関して非線形な式

8

仮想仕事式についての考察

軸(面内)方向に関する式

$$\int_0^L \delta u' N_X^p (1+u') dX = \delta u(L)P, \quad \forall \delta u \text{ s.t. } \delta u(0)=0$$

→ 線形と非線形な部分を含む剛性マトリックス

鉛直(面外)方向に関する式

$$\int_0^L \delta v' (N_X^p + \kappa GA) v' dX = \int_0^L \delta v b dX, \quad \forall \delta v \text{ s.t. } \delta v(0)=\delta v(L)=0$$

非線形性を考慮することで現れる部分
軸(面内)方向の歪が鉛直(面外)方向に与える影響

→ $\left[EA \left(u' + \frac{1}{2}u'^2 + \frac{1}{2}v'^2 \right) + \kappa GA \right] \rightarrow 0$ の場合、式は特異になり、**不安定**。

軸方向に圧縮力がかかると、 u' は負になり、[]の値が0の時座屈する。
軸方向の引張り力が小さいと、 u' が小さいので、[]の値も小さく収束しにくい。

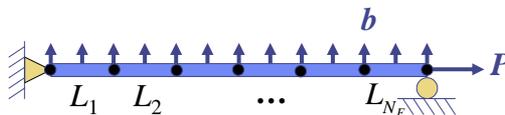
9

3) 有限要素で離散化 連続問題を構造要素で離散化

長さLのひもが、 N_E 個の1次要素 L_e で構成されているとします。
そして、連続な釣合い式の弱形式を有限要素で離散化します。

$$\sum_{e=1}^{N_E} \int_{L_e} \delta u' EA \left(u' + \frac{1}{2}u'^2 + \frac{1}{2}v'^2 \right) (1+u') dX = \delta u(L)P, \quad \forall \delta u \text{ s.t. } \delta u(0)=0$$

$$\sum_{e=1}^{N_E} \int_{L_e} \delta v' EA \left(u' + \frac{1}{2}u'^2 + \frac{1}{2}v'^2 \right) v' dX = \sum_{e=1}^{N_E} \int_{L_e} \delta v b dX, \quad \forall \delta v \text{ s.t. } \delta v(0)=\delta v(L)=0$$



ここで、ひもは鉛直方向に剛性をほとんどたないと仮定 $\kappa G \approx 0$

3) 有限要素近似

座標 $X = \sum_{i=1}^2 X_i^e N_i^1(\xi) = X_1^e \frac{1}{2}(1-\xi) + X_2^e \frac{1}{2}(1+\xi)$

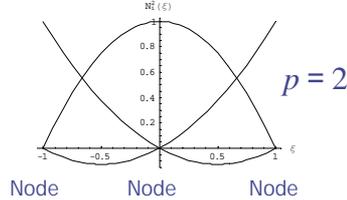
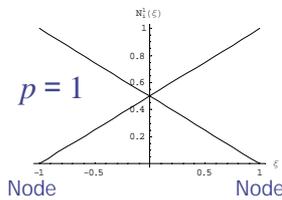
変位 $u = \sum_{i=1}^{p+1} u_i^e N_i^p(\xi), \quad v = \sum_{i=1}^{p+1} v_i^e N_i^p(\xi)$

近似関数の係数は節点値

$p=1$ ならば $N_1^1 = \frac{1}{2}(1-\xi), \quad N_2^1 = \frac{1}{2}(1+\xi)$



$p=2$ ならば $N_1^2 = \frac{1}{2}\xi(\xi-1), \quad N_2^2 = 1-\xi^2, \quad N_3^2 = \frac{1}{2}\xi(\xi+1)$



ベクトル表記

$u = \mathbf{N} \mathbf{u}_e, \quad \delta u = \mathbf{N} \delta \mathbf{u}_e, \quad u' = \frac{du}{dX} = \frac{dN_i}{dX} u_i = \mathbf{N}' \mathbf{u}_e = \mathbf{B} \mathbf{u}_e$

$v = \mathbf{N} \mathbf{v}_e, \quad \delta v = \mathbf{N} \delta \mathbf{v}_e, \quad v' = \frac{dv}{dX} = \frac{dN_i}{dX} v_i = \mathbf{N}' \mathbf{v}_e = \mathbf{B} \mathbf{v}_e$

ここで $\mathbf{N}^T = \begin{Bmatrix} N_1(\xi) \\ N_2(\xi) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{u}_e = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{v}_e = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix}$ 節点変位 \mathbf{u}_e と \mathbf{v}_e が未知数

$\frac{d\mathbf{N}}{dX} = \frac{d\mathbf{N}}{d\xi} \frac{d\xi}{dX} = \frac{d\mathbf{N}}{d\xi} \frac{2}{L_e}$



$X = X_1^e \frac{1}{2}(1-\xi) + X_2^e \frac{1}{2}(1+\xi)$

$\Rightarrow dX/d\xi = (X_2^e - X_1^e)/2 = L_e/2$

離散化された仮想仕事式(変位に関して非線形)

$$\sum_{e=1}^{N_E} \delta \mathbf{u}_e^T \int_{L_e^1}^{L_e^2} \mathbf{B}^T EA \left(\mathbf{B} \mathbf{u}_e + \frac{1}{2} (\mathbf{B} \mathbf{u}_e)^2 + \frac{1}{2} (\mathbf{B} \mathbf{v}_e)^2 \right) (1 + \mathbf{B} \mathbf{u}_e) dX = \sum_{e=1}^{N_E} \delta \mathbf{u}_e^T \int_{L_e^1}^{L_e^2} \mathbf{N}^T P \delta(X-L) dX, \forall \delta \mathbf{u}_e$$

$$\sum_{e=1}^{N_E} \delta \mathbf{v}_e^T \int_{L_e^1}^{L_e^2} \mathbf{B}^T EA \left(\mathbf{B} \mathbf{u}_e + \frac{1}{2} (\mathbf{B} \mathbf{u}_e)^2 + \frac{1}{2} (\mathbf{B} \mathbf{v}_e)^2 \right) (\mathbf{B} \mathbf{v}_e) dX = \sum_{e=1}^{N_E} \delta \mathbf{v}_e^T \int_{L_e^1}^{L_e^2} \mathbf{N}^T b dX, \forall \delta \mathbf{v}_e$$

Dirac Delta関数 $\delta(X-L)$ は $X=L$ 以外ではゼロで
 $\int u(X) \delta(X-L) dX = u(L)$

積分の計算

$$\int_{L_e^1}^{L_e^2} g(X) dX = \int_{-1}^{+1} g(\xi) \frac{dX}{d\xi} d\xi = \int_{-1}^{+1} g(\xi) \frac{L_e}{2} d\xi = \sum_{i=1}^{n_\xi} w_i g(\xi_i) \frac{L_e}{2}$$

w_i : weights of Gaussian quadrature in the ξ axis

ξ_i : quadrature points in the ξ axis

g : function to be evaluated

反復法を適用して、解を求める

13

4) ニュートン法

講義1-3”非線形方程式の解法“から

非線形問題 $\mathbf{f}(\mathbf{x})=0$ の解を見つきたい。

ニュートン法による反復式

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^{k+1}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^k + \Delta \mathbf{x}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}^k) + \nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}^k) \Delta \mathbf{x} = 0$$

$\Delta \mathbf{x}$ に関して線形化された連立方程式を $\Delta \mathbf{x}$ について解く

$$\longrightarrow \nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}^k) \Delta \mathbf{x} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^k)$$

解の更新 $\mathbf{x}^k \leftarrow \mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \Delta \mathbf{x}$

14

4)ニュートン法の適用 離散化された式

節点変位を

$$\mathbf{u}_e \rightarrow \mathbf{u}_e + \Delta \mathbf{u}_e, \quad \mathbf{v}_e \rightarrow \mathbf{v}_e + \Delta \mathbf{v}_e$$

とおき、有限要素近似で離散化した仮想仕事の式に代入する

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^{N_E} \delta \mathbf{u}_e^T \int_{L_1^e}^{L_2^e} \mathbf{B}^T EA \left(\mathbf{B}(\mathbf{u}_e + \Delta \mathbf{u}_e) + \frac{1}{2}(\mathbf{B}(\mathbf{u}_e + \Delta \mathbf{u}_e))^2 + \frac{1}{2}(\mathbf{B}(\mathbf{v}_e + \Delta \mathbf{v}_e))^2 \right) (1 + \mathbf{B}(\mathbf{u}_e + \Delta \mathbf{u}_e)) dX \\ = \sum_{e=1}^{N_E} \delta \mathbf{u}_e^T \int_{L_1^e}^{L_2^e} \mathbf{N}^T P \delta(X-L) dX, \quad \forall \delta \mathbf{u}_e \\ \sum_{e=1}^{N_E} \delta \mathbf{v}_e^T \int_{L_1^e}^{L_2^e} \mathbf{B}^T EA \left(\mathbf{B}(\mathbf{u}_e + \Delta \mathbf{u}_e) + \frac{1}{2}(\mathbf{B}(\mathbf{u}_e + \Delta \mathbf{u}_e))^2 + \frac{1}{2}(\mathbf{B}(\mathbf{v}_e + \Delta \mathbf{v}_e))^2 \right) (\mathbf{B}(\mathbf{v}_e + \Delta \mathbf{v}_e)) dX \\ = \sum_{e=1}^{N_E} \delta \mathbf{v}_e^T \int_{L_1^e}^{L_2^e} \mathbf{N}^T b dX, \quad \forall \delta \mathbf{v}_e \end{aligned}$$

15

$\Delta \mathbf{u}_e, \Delta \mathbf{v}_e$ に関する高次の項 $\Delta u^2, \Delta v^2, \Delta u \Delta v$ は十分に小さいとすると、
離散化された高次の項 $(\mathbf{B} \Delta \mathbf{u}_e)^2, (\mathbf{B} \Delta \mathbf{v}_e)^2, (\mathbf{B} \Delta \mathbf{u}_e)(\mathbf{B} \Delta \mathbf{v}_e)$ は無視できるので

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^{N_E} \delta \mathbf{u}_e^T \int_{L_1^e}^{L_2^e} \mathbf{B}^T N_X^p (1 + \mathbf{B} \mathbf{u}_e) dX + \sum_{e=1}^{N_E} \delta \mathbf{u}_e^T \int_{L_1^e}^{L_2^e} \mathbf{B}^T \left(N_X^p + EA(1 + \mathbf{B} \mathbf{u}_e)^2 \right) \mathbf{B} dX \Delta \mathbf{u}_e \\ + \sum_{e=1}^{N_E} \delta \mathbf{u}_e^T \int_{L_1^e}^{L_2^e} \mathbf{B}^T EA(1 + \mathbf{B} \mathbf{u}_e)(\mathbf{B} \mathbf{v}_e) \mathbf{B} dX \Delta \mathbf{v}_e = \sum_{e=1}^{N_E} \delta \mathbf{u}_e^T \int_{L_1^e}^{L_2^e} \mathbf{N}^T P \delta(X-L) dX, \quad \forall \delta \mathbf{u}_e \\ \sum_{e=1}^{N_E} \delta \mathbf{v}_e^T \int_{L_1^e}^{L_2^e} \mathbf{B}^T N_X^p (\mathbf{B} \mathbf{v}_e) dX + \sum_{e=1}^{N_E} \delta \mathbf{v}_e^T \int_{L_1^e}^{L_2^e} \mathbf{B}^T EA(1 + \mathbf{B} \mathbf{u}_e)(\mathbf{B} \mathbf{v}_e) \mathbf{B} dX \Delta \mathbf{u}_e \\ + \sum_{e=1}^{N_E} \delta \mathbf{v}_e^T \int_{L_1^e}^{L_2^e} \mathbf{B}^T \left(N_X^p + EA(\mathbf{B} \mathbf{v}_e)^2 \right) \mathbf{B} \Delta \mathbf{v}_e dX = \sum_{e=1}^{N_E} \delta \mathbf{v}_e^T \int_{L_1^e}^{L_2^e} \mathbf{N}^T b dX, \quad \forall \delta \mathbf{v}_e \end{aligned}$$

$$N_X^p = EA \left(\mathbf{B} \mathbf{u}_e + \frac{1}{2}(\mathbf{B} \mathbf{u}_e)^2 + \frac{1}{2}(\mathbf{B} \mathbf{v}_e)^2 \right) \quad \text{と置く}$$

16

増分の項を左辺に集め、 $\Delta \mathbf{u}_e, \Delta \mathbf{v}_e$ について線形化された方程式を得る。

$$\sum_{e=1}^{N_E} \delta \mathbf{u}_e^T \left[\int_{L_1^e}^{L_2^e} \mathbf{B}^T \left(N_X^p + EA(1 + \mathbf{B}\mathbf{u}_e)^2 \right) \mathbf{B} dX \right] \Delta \mathbf{u}_e + \sum_{e=1}^{N_E} \delta \mathbf{u}_e^T \left[\int_{L_1^e}^{L_2^e} \mathbf{B}^T EA(1 + \mathbf{B}\mathbf{u}_e)(\mathbf{B}\mathbf{v}_e) \mathbf{B} dX \right] \Delta \mathbf{v}_e$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{=K_{11}^e}$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{=K_{12}^e}$

$$= - \sum_{e=1}^{N_E} \delta \mathbf{u}_e^T \underbrace{\int_{L_1^e}^{L_2^e} \mathbf{B}^T N_X^p (1 + \mathbf{B}\mathbf{u}_e) dX}_{=q_1^e} + \sum_{e=1}^{N_E} \delta \mathbf{u}_e^T \underbrace{\int_{L_1^e}^{L_2^e} \mathbf{N}^T P \delta(X-L) dX}_{=f_1^e}, \quad \forall \delta \mathbf{u}_e$$

$$\sum_{e=1}^{N_E} \delta \mathbf{v}_e^T \left[\int_{L_1^e}^{L_2^e} \mathbf{B}^T EA(1 + \mathbf{B}\mathbf{u}_e)(\mathbf{B}\mathbf{v}_e) \mathbf{N}' dX \right] \Delta \mathbf{u}_e + \sum_{e=1}^{N_E} \delta \mathbf{v}_e^T \left[\int_{L_1^e}^{L_2^e} \mathbf{B}^T \left(N_X^p + EA(\mathbf{B}\mathbf{v}_e)^2 \right) \mathbf{B} dX \right] \Delta \mathbf{v}_e$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{=K_{21}^e}$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{=K_{22}^e}$

$$= - \sum_{e=1}^{N_E} \delta \mathbf{v}_e^T \underbrace{\int_{L_1^e}^{L_2^e} \mathbf{B}^T N_X^p (\mathbf{B}\mathbf{v}_e) dX}_{=q_2^e} + \sum_{e=1}^{N_E} \delta \mathbf{v}_e^T \underbrace{\int_{L_1^e}^{L_2^e} \mathbf{N}^T b dX}_{=f_2^e}, \quad \forall \delta \mathbf{v}_e$$

接線剛性マトリックス

$$\mathbf{K}_{11}^e = \underbrace{\int_{L_1^e}^{L_2^e} \mathbf{B}^T EA \mathbf{B} dX}_{\text{線形}} + \underbrace{\int_{L_1^e}^{L_2^e} \mathbf{B}^T \left(EA(2\mathbf{B}\mathbf{u}_e + (\mathbf{B}\mathbf{u}_e)^2) \right) \mathbf{B} dX}_{\text{非線形}} + \underbrace{\int_{L_1^e}^{L_2^e} \mathbf{B}^T N_X^p \mathbf{B} dX}_{\text{初期応力}}$$

$$\mathbf{K}_{22}^e = \underbrace{\int_{L_1^e}^{L_2^e} \mathbf{B}^T \left(EA(\mathbf{B}\mathbf{v}_e)^2 \right) \mathbf{B} dX}_{\text{非線形}} + \underbrace{\int_{L_1^e}^{L_2^e} \mathbf{B}^T N_X^p \mathbf{B} dX}_{\text{初期応力}}$$

$$\mathbf{K}_{12}^e = \underbrace{\int_{L_1^e}^{L_2^e} \mathbf{B}^T EA(1 + \mathbf{B}\mathbf{u}_e)(\mathbf{B}\mathbf{v}_e) \mathbf{B} dX}_{\text{非線形}} = \mathbf{K}_{21}^{eT}$$

講義2-5"陰解法と要素" p11参照

$$\sum_{e=1}^{N_E} \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{K}_{11}^e \Delta \mathbf{u}_e + \sum_{e=1}^{N_E} \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{K}_{12}^e \Delta \mathbf{v}_e = - \sum_{e=1}^{N_e} \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{q}_1^e + \sum_{e=1}^{N_E} \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{f}_1^e, \quad \forall \delta \mathbf{u}_e$$

$$\sum_{e=1}^{N_E} \delta \mathbf{v}_e^T \mathbf{K}_{21}^e \Delta \mathbf{u}_e + \sum_{e=1}^{N_E} \delta \mathbf{v}_e^T \mathbf{K}_{22}^e \Delta \mathbf{v}_e = - \sum_{e=1}^{N_E} \delta \mathbf{v}_e^T \mathbf{q}_2^e + \sum_{e=1}^{N_E} \delta \mathbf{v}_e^T \mathbf{f}_2^e, \quad \forall \delta \mathbf{v}_e$$

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^{N_E} \mathbf{K}_{11}^e \Delta \mathbf{u}_e + \sum_{e=1}^{N_E} \mathbf{K}_{12}^e \Delta \mathbf{v}_e &= \sum_{e=1}^{N_E} (\mathbf{f}_1^e - \mathbf{q}_1^e) \\ \sum_{e=1}^{N_E} \mathbf{K}_{21}^e \Delta \mathbf{u}_e + \sum_{e=1}^{N_E} \mathbf{K}_{22}^e \Delta \mathbf{v}_e &= \sum_{e=1}^{N_E} (\mathbf{f}_2^e - \mathbf{q}_2^e) \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \mathbf{v} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1 - \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{f}_2 - \mathbf{q}_2 \end{Bmatrix}$$

接線剛性 変位 残差
マトリックス 増分 ベクトル

変位の更新

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_e^k &\rightarrow \mathbf{u}_e^{k+1} = \mathbf{u}_e^k + \Delta \mathbf{u}_e \\ \mathbf{v}_e^k &\rightarrow \mathbf{v}_e^{k+1} = \mathbf{v}_e^k + \Delta \mathbf{v}_e \end{aligned}$$

収束判定 (エネルギーノルム)

$$\left\| \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1 - \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{f}_2 - \mathbf{q}_2 \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \mathbf{v} \end{Bmatrix} \right\|_2 \leq 10^{-3}$$

増分 $\Delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{v}$ について解き、解を更新。収束するまで反復計算を繰り返す。

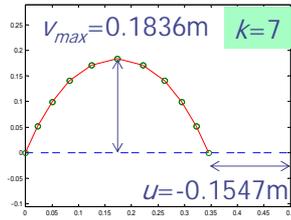
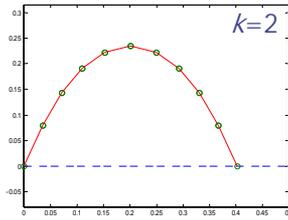
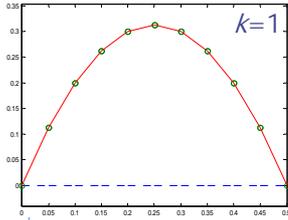
Matlabによるプログラム

以上の2つの定式化に従って解いた結果
付録: Matlabによるプログラム
Exercise2_Newton: ニュートン法

ニュートン法 $P=1\text{kg}$

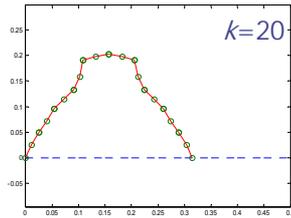
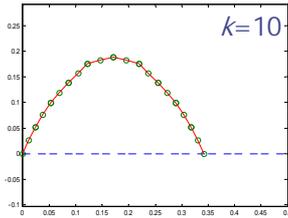
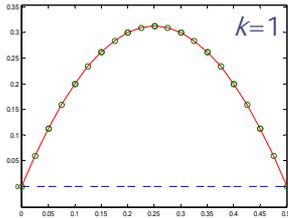
1次要素

要素分割10



2次要素

要素分割10

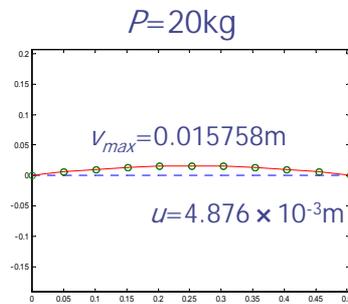
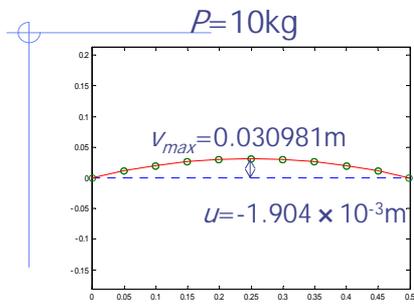


- ✳ 軸方向の引張り力が小さいので、不安定な状態にあり、収束しない。
- ✳ 1次要素では $P=1\text{kg}$ ではたまたま収束するが、 $P=1.1\text{kg}$ をかけると収束しないし、2次要素の方は引張り荷重が 3kg 以上にならないと収束しなかった。

21

ニュートン法 1次要素

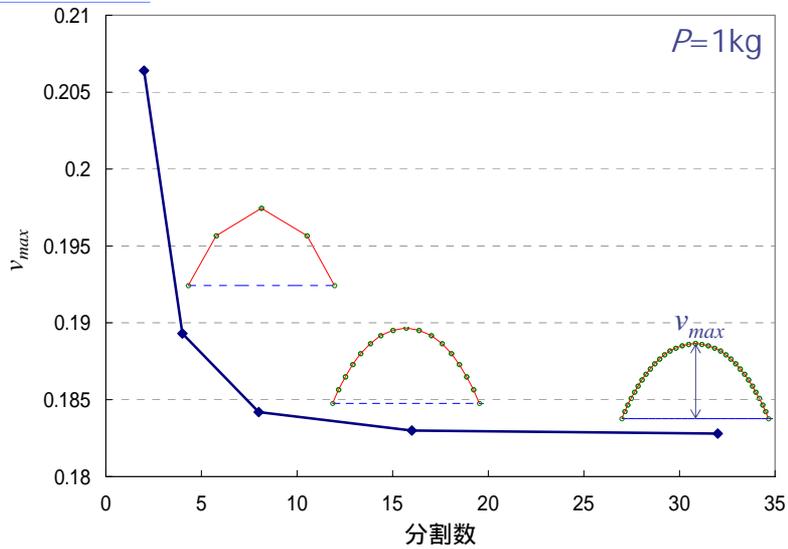
要素分割10



P	v_{max}	$u@roller$
1kg	0.1836m	-0.1547m
10kg	0.030981m	-0.00190m
20kg	0.015758m	0.004876m

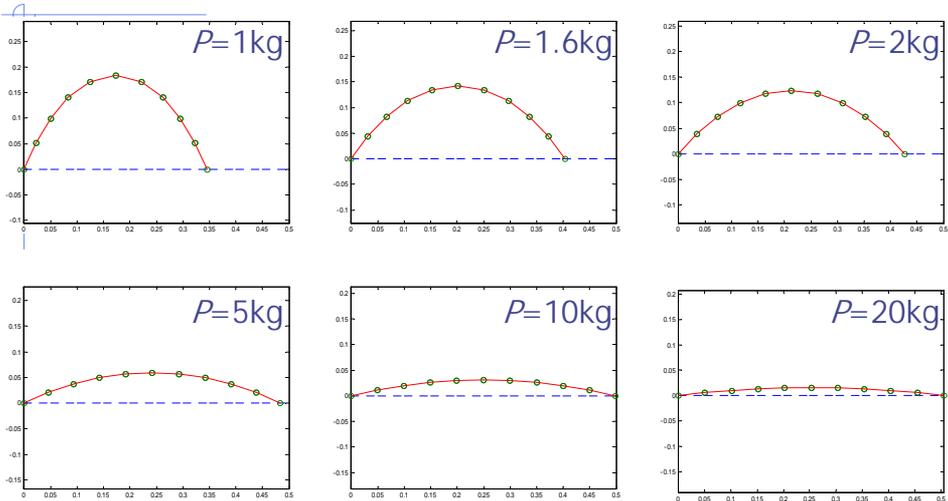
22

分割数と近似解の収束



23

荷重v.s.たわみ



24

荷重v.s.最大たわみ

