基礎勉強会「固体の線形解析」

- 「基礎勉強会」開催の動機
  - 非線形CAE勉強会の定番講義
    - 京谷先生：難解な非線形力学をわかり易く講義.
    - 寺田先生：複雑な数値解析の基礎を多彩な表現で講義.
    - 山田先生：基礎的な有限要素の数理の原理原則を講義.
  - 固体変形の非線形解析の勉強会としては高い完成度.
    - 「良質かつ硬派」な講義：多くの支持をいただいて10年以上.
    - 参加者層の若年化
- 全ての参加者が十分理解できているとは限らない.
  - 学術研究レベルの常識と産業界で使われる技術のギャップ
    - 微小ひずみ，対数ひずみ ⇔ Green-Lagrangeひずみ
    - 弾塑性の加算分解 ⇔ 乗算分解.
  - CAEを使う技術者は必ずしも十分な力学的基礎を学んでいるとは限らない.
- 新しくこの分野に入ってくる若いエンジニアにとって必要な知識は？

CAEと計算力学の乖離

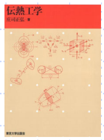
- 「計算固体力学の動向とこれから」

  - 菊池　昇(ミシガン州立大学)
    - 計算工学会,vol.11,no.1(2006),p16-21.
  - 計算力学とCAE
    - かつては表裏一体であったが，近年，研究としての計算力学と産業的応用としてのCAEが乖離してきている.
    - 高度化によって計算力学研究の全体像の把握が困難になった.
  - 厳しい指摘
    - 市販ソフトはTimoshenkoの全著作を網羅するほどの機能があり，これらを読みこなしていなければその真価を理解することは難しい.
    - これらのソフトを用いてCAE活動をするのであれば，連続体力学理論を十分読みこなしていることが「礼儀」であろう.
    - 市販ソフトといえども使い方や学び方に大きな課題を残している.

「理解」に王道無し.

- 「伝熱工学」:第1章序論:庄司正弘(東大)
  - 勉学の態度として，イタリアの神学者の言葉を引用.
  - St. Thomas Aquinus(1225-74)がある学徒の「如何に学問すべきか」という問に答えた手紙の抜粋.

- (前略)..即ち，何事も容易な事柄から始めて困難な事柄へ進むべきでありますから，あなたも河を下っていきなり，大洋の深みへ入るようなことをなさってはなりません.
- (中略)..読むにも聞くにもよく理解するように努め，疑わしいことははっきりと確かめ，できる限り多くのことを知識の蔵の棚に収めて，やがてその棚を満たすように勤勉に努力することです.

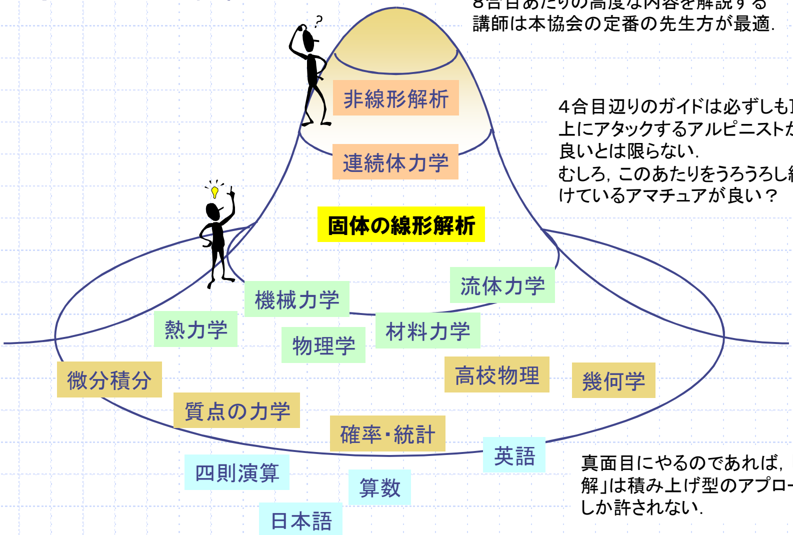


「理解の山」を登る.

- 我々の立ち位置

８合目あたりの高度な内容を解説する講師は本協会の定番の先生方が最適.

４合目辺りのガイドは必ずしも頂上にアタックするアルピニストが良いとは限らない.
むしろ，このあたりをうろうろし続けているアマチュアが良い？

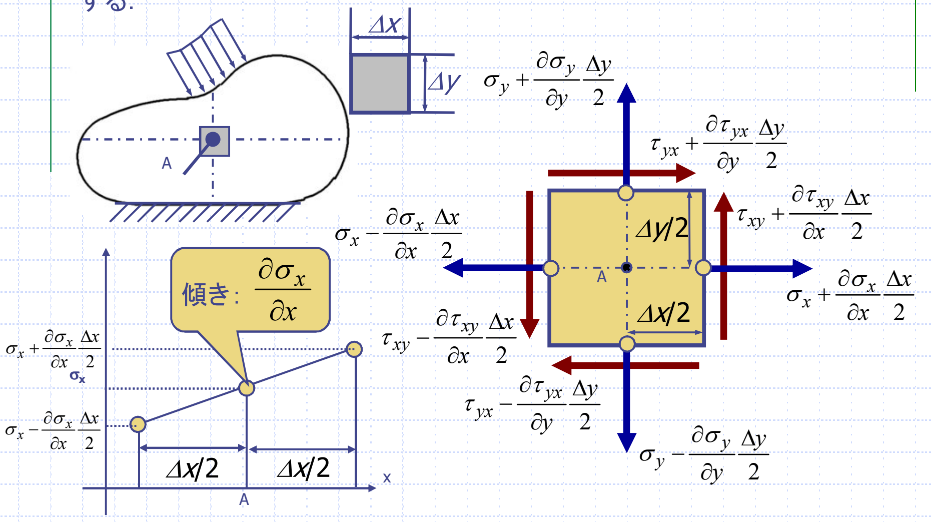


真面目にやるのであれば，「理解」は積み上げ型のアプローチしか許されない.

2. 力のつりあい

微小要素：線形分布が仮定できるぐらい小さいということ.

A点を中心としたΔxΔyの微小要素を考えて，応力の線形分布を仮定する.

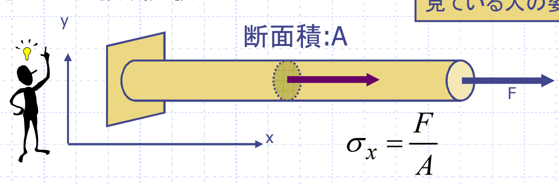


3. 応力の座標変換

応力の表現は座標軸の取り方に依存する.

表示は全く異なるが同じ応力状態を示す.
見ている人の姿勢が異なるだけ.

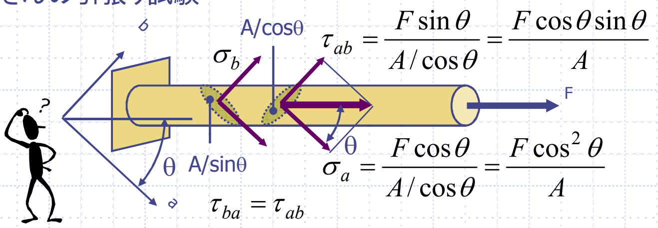
●Aさんの引張り試験



$$\sigma_x = \frac{F}{A}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

●Bさんの引張り試験



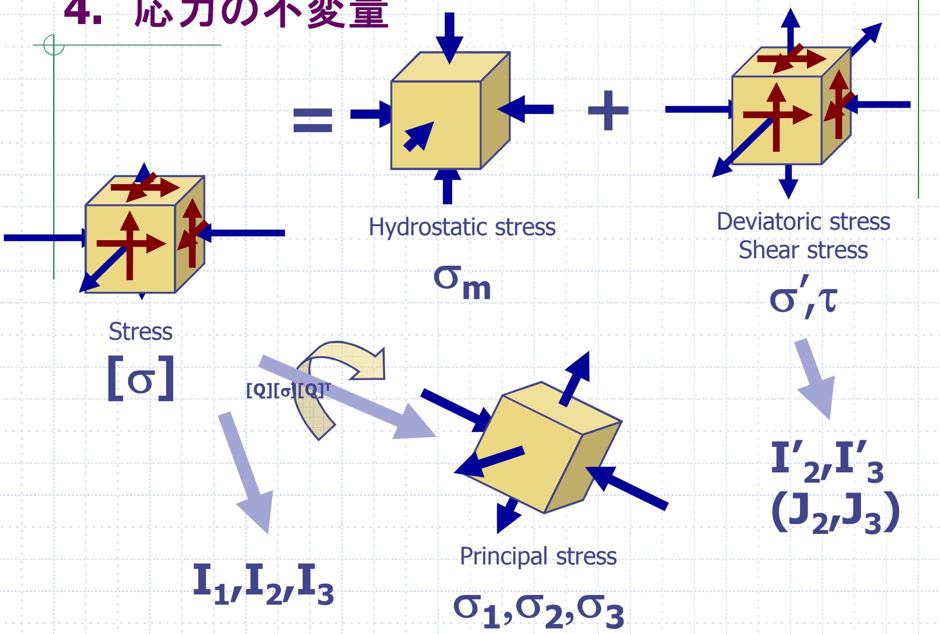
$$\tau_{ab} = \frac{F\sin\theta}{A/\cos\theta} = \frac{F\cos\theta\sin\theta}{A}$$

$$\sigma_a = \frac{F\cos\theta}{A/\cos\theta} = \frac{F\cos^2\theta}{A}$$

$$\tau_{ba} = \tau_{ab}$$

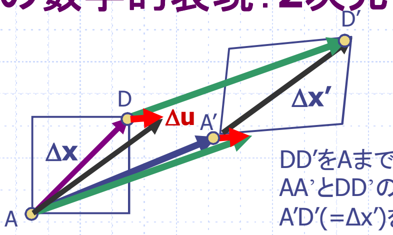
$$\begin{bmatrix} \sigma_a & \tau_{ab} \\ \tau_{ab} & \sigma_b \end{bmatrix}$$

4. 応力の不変量



4. ひずみの数学的表現:2次元

単軸のイメージとの対応



DD'をAまで平行移動
AA'とDD'の差(=Δu)をDに平行移動
A'D'(=Δx')をAまで平行移動

A'D' = AD + DD' -AA'

$$\{\Delta x'\}=\{\Delta x\}+\underline{\{u(x+\Delta x)\}-\{u(x)\}}=\{\Delta x\}+\underbrace{\{\Delta u\}}_{\text{記載の定義}}$$

$$\{\Delta x'\}-\{\Delta x\}=\{\Delta u\}$$

単軸では…

$$\varepsilon_x=\frac{\text{変形後の長さ}-\text{変形前の長さ}}{\text{変形前の長さ}}=\frac{L'-L}{L}=\frac{\Delta L}{L} \Rightarrow \Delta L=\varepsilon_x\times L$$

二次元では…

$$\frac{\{\Delta x'\}-\{\Delta x\}}{\{\Delta x\}}=\frac{\{\Delta u\}}{\{\Delta x\}}$$ ベクトルの割り算? ⇒ $\{\Delta u\}=[?]\{\Delta x\}$

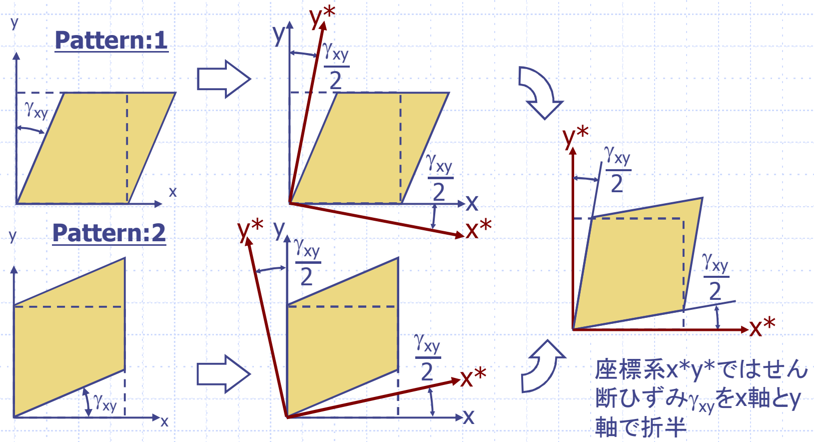
Slide No.9

5. 回転の除去

「回転」の除去

X軸に添わせるか,y軸に添わせるか?

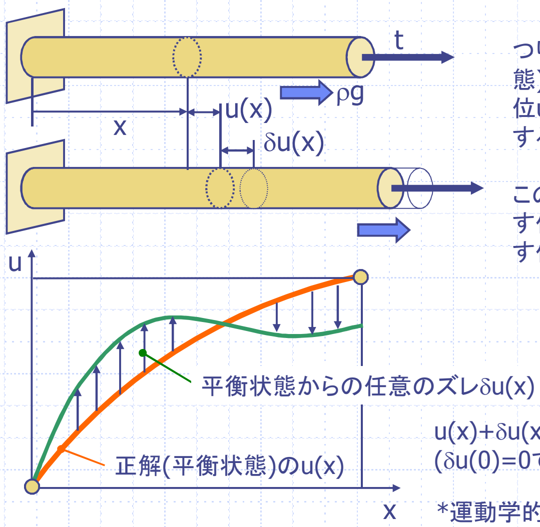
せん断ひずみの等価変換:同じ変形と見るために座標系を回転させる.



Slide No.10

3. 仮想仕事の原理のイメージ(1)

ここまでの数式展開は高校数学でも可能ですが,大切なのはイメージです.



つりあっている状態(正解の状態)を考えて,この状態から変位uに任意のズレδuが生じたとする.

この「ズレδuと内力(応力)がなす仕事」は「ズレδuと外力がなす仕事」と等しい.

$u(x)+\delta u(x)$:いろいろある解の候補*

($\delta u(0)=0$でないと解の候補にもならない)

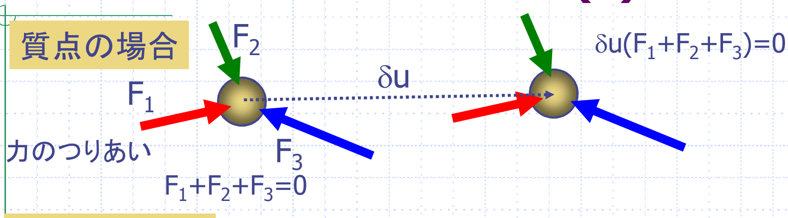
*運動学的可容変位

(Kinematically Admissible displacement)

Slide No.11

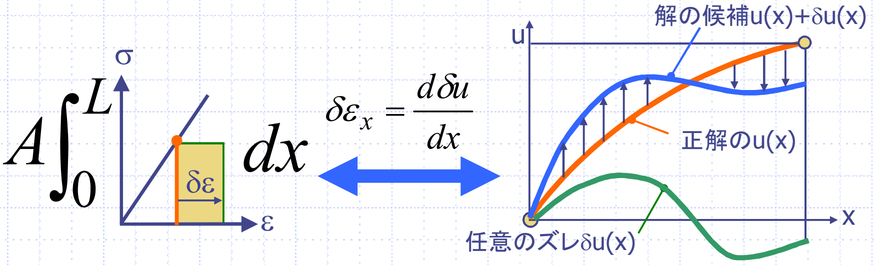
3. 仮想仕事の原理のイメージ(2)

質点の場合



連続体の場合

内部仮想仕事 $A\int_0^L \sigma_x \delta\varepsilon_x dx = A\int_0^L \rho g \delta u dx + At\delta u(L)$ 外部仮想仕事



Slide No.12

4. 全ポテンシャルと力のつりあい

◆ ところで，何でポテンシャルエネルギを集めているのか？

- ポテンシャルΦから保存力**F**が

$$F_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial u_i}$$

で表されるということでした．

- ポテンシャルを集めて，それぞれの力を求めると

$$F_i^A = -\frac{\partial \Phi^A}{\partial u_i} \quad F_i^B = -\frac{\partial \Phi^B}{\partial u_i} \quad \cdots\cdots$$

とすれば，

$$F_i^A + F_i^B + \ldots = 0 \quad \text{なので，} \quad \frac{\partial \Phi^A}{\partial u_i} + \frac{\partial \Phi^B}{\partial u_i} + \cdots = 0$$

Φ^A, Φ^B...の合計をトータルポテンシャルエネルギΦで記せば，

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_i} = 0$$

が「力のつりあい」

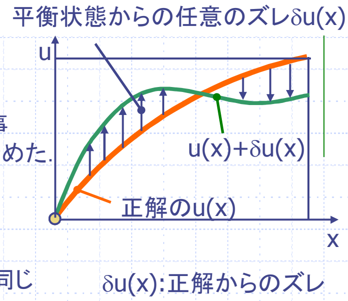
Slide No.13

5. 二つの原理の等価性

仮想仕事の原理:

【Logic】

δu:平衡状態からズレた変位(仮想変位)
内力(応力)のする仮想仕事=外力のする仮想仕事
微小要素の力のつりあいと力学的境界条件をまとめた.



$$A\int_0^L \sigma_x \delta\varepsilon_x dx = A\int_0^L \rho g \delta u dx + At\delta u(L)$$

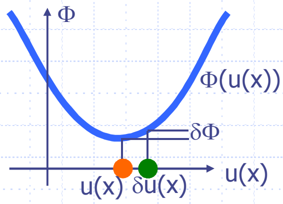
⇕ 結果得られる式は全く同じ

$$\delta\Phi = A\int_0^L E\varepsilon_x \delta\varepsilon_x dx - A\int_0^L \rho g \delta u dx - At\delta u(L) = 0$$

最小ポテンシャルエネルギの原理:

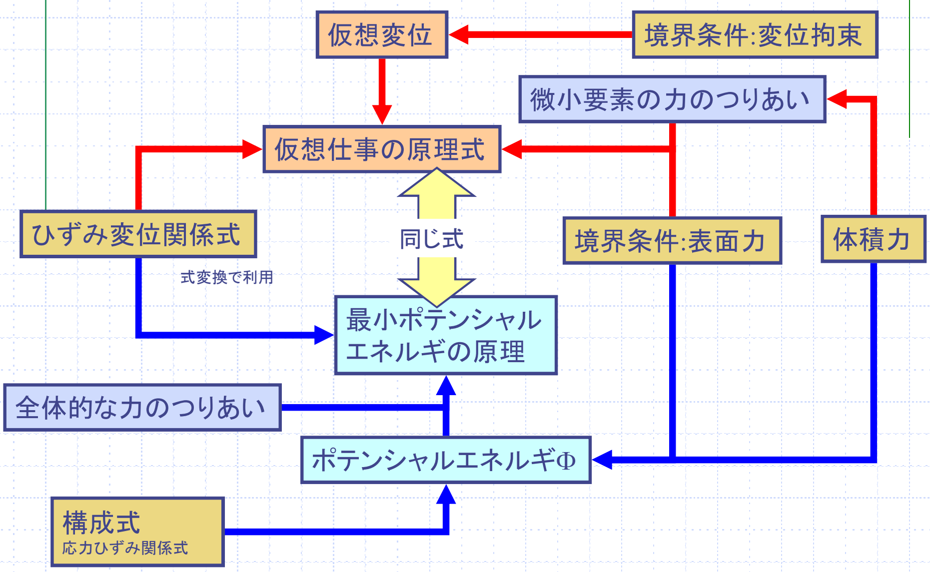
【Logic】

問題を構成する物理現象のポテンシャルを定義
全ポテンシャルの最小化が全体の力をつりあわせる.



Slide No.14

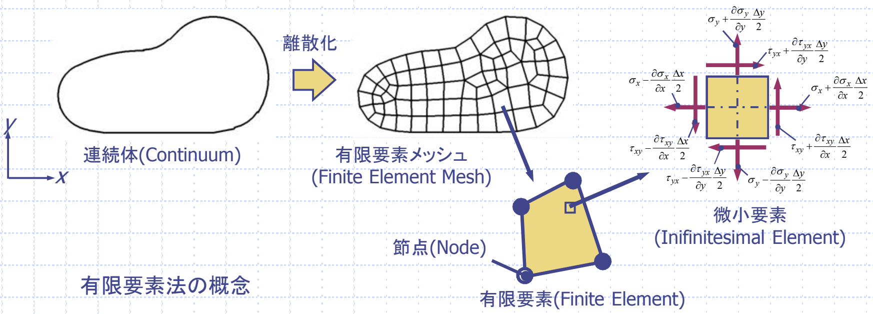
5. 二つの原理の構造



Slide No.15

0. 有限要素法の基本概念

◆「困難は分割せよ」
- 複雑な現象を眺めていても解法は見つからない．
  - モデル化可能なレベルまで現象を**「分解」**する．
- 力のつりあい：微小要素(微分方程式による記述)
- 複雑形状の表現(直交格子である必要はない．有限要素：一般化差分法)
- 仮想仕事の原理式(領域積分による記述)，要素の重ね合わせ
  - 分解したものを**「統合」**する

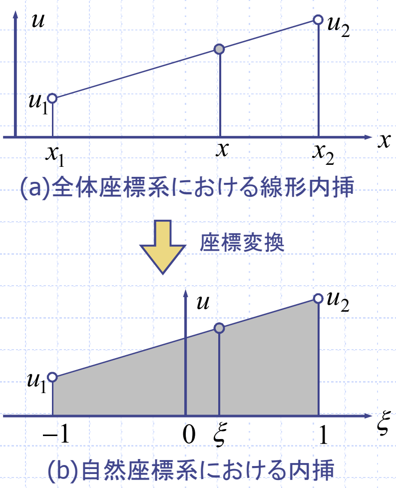


有限要素法の概念

Slide No.16

1. 一次元の内挿補間(2)

◆ 補間関数としての形状関数
- x_1〜x_2をひとつの要素と考えて-1〜1となる座標に変換．



xからξへの座標変換（形状座標xの補間）

$$x=\frac{x_2-x_1}{2}\xi+\frac{x_1+x_2}{2}$$
$$=\frac{1-\xi}{2}x_1+\frac{1+\xi}{2}x_2\equiv\phi_1(\xi)x_1+\phi_2(\xi)x_2$$

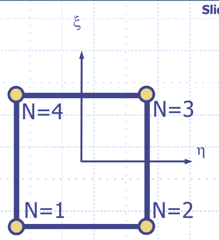
補間関数ϕ

$$\phi_1(\xi)=\frac{1-\xi}{2},\quad \phi_2(\xi)=\frac{1+\xi}{2}$$

補間関数ϕを用いたuの記述（データuの補間）

$$u=\phi_1(\xi)u_1+\phi_2(\xi)u_2$$

1. ひずみの算出(2)



二次元へ拡張:

座標 $x=\sum_{N=1}^{4}\phi_N(\xi,\eta)x_N,\ y=\sum_{N=1}^{4}\phi_N(\xi,\eta)y_N$

変位 $u_x=\sum_{N=1}^{4}\phi_N(\xi,\eta)u_{xN},\ u_y=\sum_{N=1}^{4}\phi_N(\xi,\eta)u_{yN}$

二次元問題のひずみ: $\varepsilon_x=\dfrac{\partial u_x}{\partial x}\quad \varepsilon_y=\dfrac{\partial u_y}{\partial y}\quad \gamma_{xy}=\dfrac{\partial u_y}{\partial x}+\dfrac{\partial u_x}{\partial y}$

一例として, x方向垂直ひずみε_xを展開.

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u_x}{\partial x}=\frac{\partial u_x}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=\left(\sum_{N=1}^{4}\frac{\partial \phi_N}{\partial \xi}u_{xN}\right)\boxed{\frac{\partial \xi}{\partial x}}+\left(\sum_{N=1}^{4}\frac{\partial \phi_N}{\partial \eta}u_{xN}\right)\boxed{\frac{\partial \eta}{\partial x}}$$

媒介変数(ξ,η)
微分の連鎖則

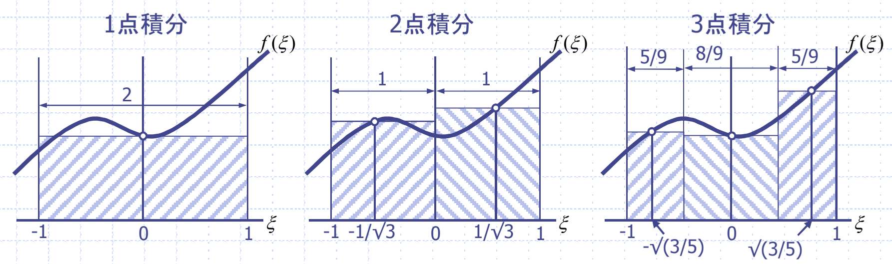
一次元同様に逆関係からもとめるただし今回は「行列」となる.

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta}\\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum_{N=1}^{4}\dfrac{\partial \phi_N}{\partial \xi}x_N & \sum_{N=1}^{4}\dfrac{\partial \phi_N}{\partial \eta}x_N\\ \sum_{N=1}^{4}\dfrac{\partial \phi_N}{\partial \xi}y_N & \sum_{N=1}^{4}\dfrac{\partial \phi_N}{\partial \eta}y_N\end{bmatrix}\equiv[J]\ \xrightarrow{\text{逆行列}}\ [J]^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \xi}{\partial y}\\ \dfrac{\partial \eta}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial y}\end{bmatrix}$$

2.　Gauss-Legendreの積分公式(2)

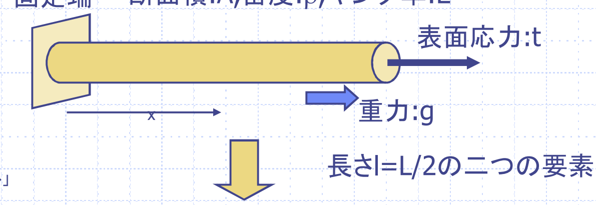
- 積分点数によって積分精度が変わる.
  - N_g点積分では$(2N_g-1)$次の多項式まで正確に積分できる.

積分点数 N_g	評価点位置 ξ_i	重み w_i	
1	0	2	1次式まで
2	$-1/\sqrt{3}$	1	3次式まで
	$1/\sqrt{3}$	1	
3	$-\sqrt{3/5}$	5/9	5次式まで
	0	8/9	
	$\sqrt{3/5}$	5/9	

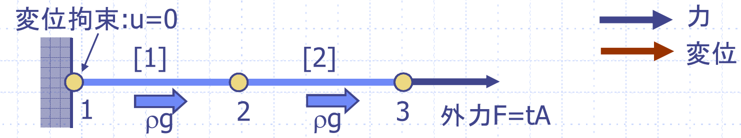


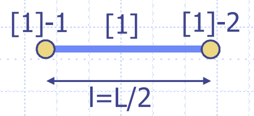
1. 離散化:Discretization (1)

「現実」



「有限要素モデル」





No.[1]要素の構成

記述のルール
[n]　:全体でn番目の要素
n　:全体でn番目の節点
[n]-m　:要素番号nの要素内節点番号mの節点

例)$u_2=u_{[1]-2}=u_{[2]-1}$

1. 要素剛性方程式(5)

得られた式の解釈

$$\frac{AE}{l}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{[1]-1}\\ u_{[1]-2}\end{bmatrix}=\left[\frac{Al\rho g}{2}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}F^R_{[1]-1}\\ F^Q_{[1]-2}\end{bmatrix}\right]$$

左辺:

弾性棒をバネと見なすと

$$\frac{F}{A}=\sigma=E\varepsilon=E\frac{u}{l}\ \text{より}\ F=\boxed{\frac{AE}{l}}u\equiv ku$$

つまり左辺の係数行列はバネ定数と同じであるため「剛性行列:Stiffness matrix」と呼ぶ.

$\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$の部分:

この部分は変位の差をとっており，与えた変位に対してバネの反力が計算される仕掛けになっている．例えば，$u_{[1]-1}$を固定して，$u_{[1]-2}$に正の値を入れると節点[1]-1には負の力が，節点[1]-2には正の力が生じる(引張られる).

右辺:

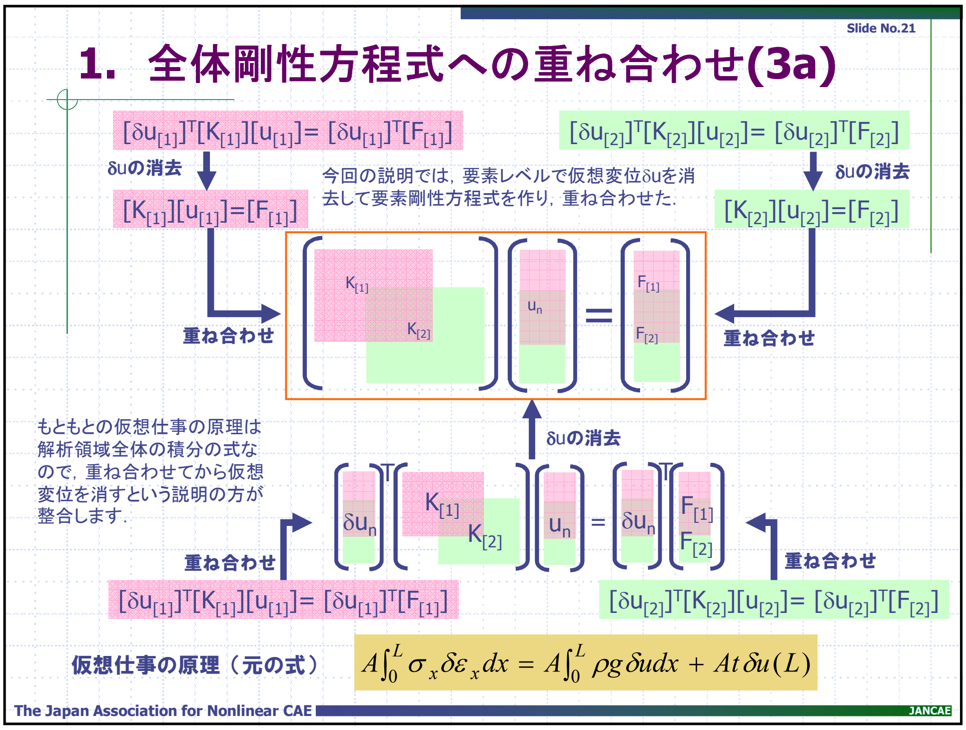
第一項は，Alが体積をρが比重を示すのでAlρg=mgであり，これを節点に1/2づつ振り分けたものを意味する．このような振り分けた力を等価節点力(Equivalent nodal force)という

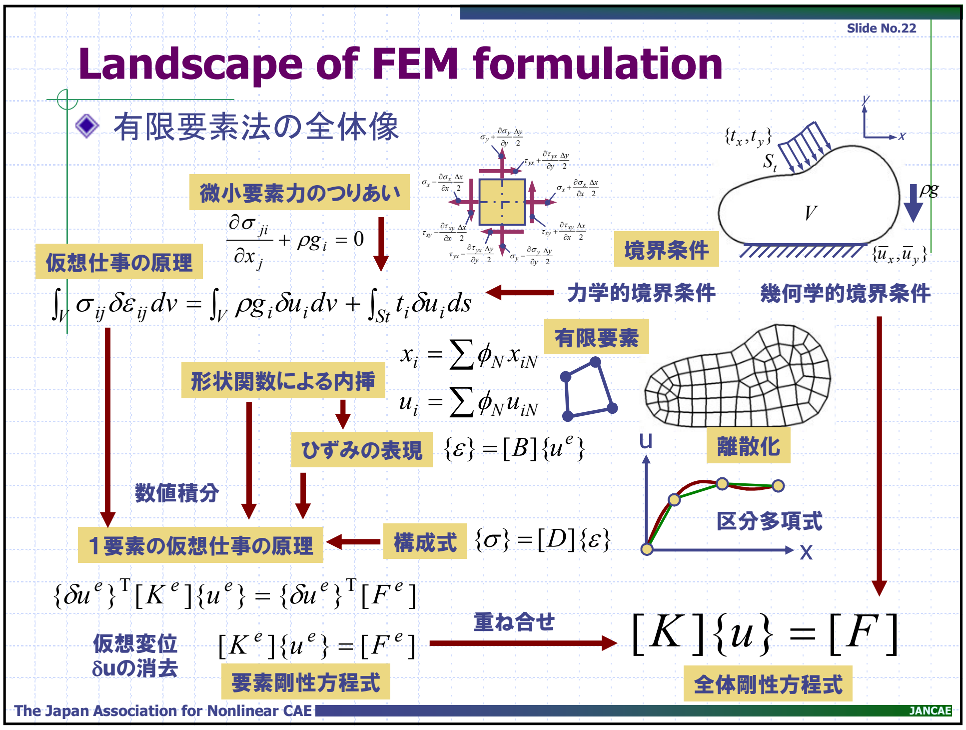
第二項は要素に対して外力をベクトル状に並べたもの.

以上より，右辺は外部から加えられた「力」を節点に配分したものを意味する.

簡略化して $[K_{[1]}][u_{[1]}]=[F_{[1]}]$

[要素剛性行列][節点変位ベクトル]=[等価節点力ベクトル]

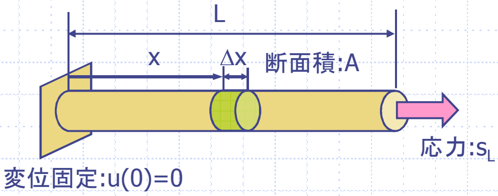

Slide No.21
1. 全体剛性方程式への重ね合わせ(3a)
[δu[1]]T[K[1]][u[1]]= [δu[1]]T[F[1]]
δuの消去
[K[1]][u[1]]=[F[1]]
[δu[2]]T[K[2]][u[2]]= [δu[2]]T[F[2]]
δuの消去
[K[2]][u[2]]=[F[2]]
今回の説明では，要素レベルで仮想変位δuを消去して要素剛性方程式を作り，重ね合わせた．
重ね合わせ
重ね合わせ
δuの消去
もともとの仮想仕事の原理は解析領域全体の積分の式なので，重ね合わせてから仮想変位を消すという説明の方が整合します．
重ね合わせ
重ね合わせ
[δu[1]]T[K[1]][u[1]]= [δu[1]]T[F[1]]
[δu[2]]T[K[2]][u[2]]= [δu[2]]T[F[2]]
仮想仕事の原理（元の式）
$A\int_0^L \sigma_x \delta\varepsilon_x dx = A\int_0^L \rho g \delta u dx + At\delta u(L)$
The Japan Association for Nonlinear CAE
JANCAE

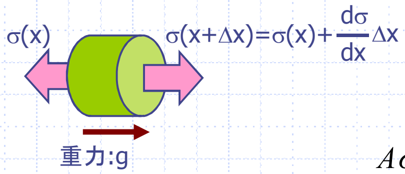

Slide No.22
Landscape of FEM formulation
有限要素法の全体像
微小要素力のつりあい
$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho g_i = 0$
仮想仕事の原理
$\int_V \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}dv = \int_V \rho g_i \delta u_i dv + \int_{St} t_i \delta u_i ds$
境界条件
力学的境界条件
幾何学的境界条件
有限要素
$x_i = \sum \phi_N x_{iN}$
$u_i = \sum \phi_N u_{iN}$
形状関数による内挿
ひずみの表現
$\{\varepsilon\} = [B]\{u^e\}$
離散化
区分多項式
数値積分
1要素の仮想仕事の原理
構成式
$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$
$\{\delta u^e\}^T[K^e]\{u^e\} = \{\delta u^e\}^T[F^e]$
仮想変位
δuの消去
$[K^e]\{u^e\} = [F^e]$
要素剛性方程式
重ね合せ
$[K]\{u\} = [F]$
全体剛性方程式
The Japan Association for Nonlinear CAE
JANCAE

Slide No.23

一次元固体力学の世界

基礎的な一次元の棒の引張り問題を考える





Hookeの法則

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{du}{dx}$$

ひずみと変位の関係式を代入

力のつりあい

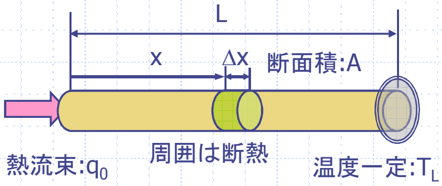
$$A\sigma = A\left(\sigma + \frac{d\sigma}{dx}\Delta x\right) + \rho g A \Delta x$$

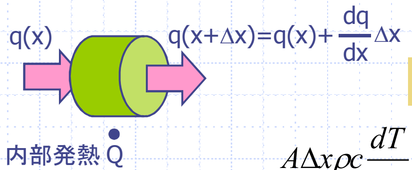
$$0 = \frac{d\sigma}{dx} + \rho g$$

Slide No.24

一次元熱伝導の世界

基礎的な一次元の熱伝導の問題を考える





Fourierの法則

$$q = -\lambda \frac{dT}{dx}$$

熱量保存則

$$A\Delta x \rho c \frac{dT}{dt} = Aq - A\left(q + \frac{dq}{dx}\Delta x\right) + A\Delta x \dot{Q}$$

$$\rho c \frac{dT}{dt} = -\frac{dq}{dx} + \dot{Q}$$

Slide No.25

固体力学と熱伝導の式：類似

- 得られた方程式は全く同じ！
  - 変数や式の意味の対応表は以下のとおり．

	熱伝導	固体力学
解の関数	T:温度	u:変位
解の1階微分	∇T:温度勾配	ε:ひずみ
特徴的な材料特性	λ:熱伝導率	E:Young率
1階微分×材料特性	q:熱流束	σ:応力
原理的な物理則	熱量保存則	力のつりあい
経験的な物理則	Fourier則	Hooke則
境界条件（第一種）	T_L:温度固定	u_0:変位固定
（第二種）	q_0:熱流束既知	s_L:応力既知

The Japan Association for Nonlinear CAE JANCAE

Slide No.26

固体力学と熱伝導の式：相違

- 仮定の元で得られた方程式は全く同じだが．
  - 熱伝導での仮定：
    - 「定常状態」にある．
    - 非定常であれば，温度変化項cρdT/dtを含む．
  - 固体力学での仮定：
    - 物体が「静的なつりあい状態」にある．
    - 動的なつりあい状態であれば，加速度項$\rho d^2u/dt^2$を含む．
- 明瞭な差異：
  - 動的（または非定常）で含まれる時間微分項：
    - 伝熱では1階微分dT/dt，固体では2階微分d^2u/dt^2となる．
  - 2または3次元に拡張すると.....
    - 固体：変位uはベクトル，応力σとひずみεは2階のテンソル，材料特性（応力ひずみ関係式）は4階のテンソル．
    - 伝熱：温度Tはスカラ，熱流束qと温度勾配∇Tはベクトル，熱伝導率λは(実は一般的には)2階のテンソル．

The Japan Association for Nonlinear CAE JANCAE

現象のアナロジー

- 物理現象を記述する方程式
  - ひとつの物理現象について,
    - 「何かのバランス」を記述した原理的な式.
      - 保存則, つりあい式…
    - 「異なる物理変数の関係」を記述した経験式.
      - その現象を特徴付ける材料特性を含む式.
      - 通常, 発見者の名前を冠することが多い.
  - が存在する.
- 数式モデルの等価性:同じ解法が適用可能
  - よって数値解法を議論する時には「方程式の型」が重要視される.
    - 楕円型・双曲型・放物型
- 難解な数式を振り回すことが目的ではない.
  - 類似点の利用:
    - 類似問題からの拡張および理解の転用・応用.
  - 相違点の利用
    - 数式モデルの解釈の違いにその物理現象の本質が隠れている.