

rev.0
rev.0.1
rev.0.2

2012/05/18: 非線形CAE勉強会(第21期) 基礎勉強会「固体の線形解析」(中央大学駿河台記念館)
2012/10/09: 非線形CAE勉強会(第22期) 基礎勉強会「固体の線形解析」(トヨタ産業技術記念館)
2013/05/17: 非線形CAE勉強会(第23期) 基礎勉強会「固体の線形解析」(東海大学高輪キャンパス)

基礎勉強会「固体の線形解析」

FEM Basic Seminar :
Linear Analysis of Solid Mechanics For the Rest of Us

日本工業大学 機械工学科 瀧澤英男
htaki@nit.ac.jp

これは、webでダウンロードするテキストpdfの抜粋サンプルです。

基礎勉強会「固体の線形解析」

◆ 「基礎勉強会」開催の動機

- 非線形CAE勉強会の定番講義
 - ◆ 京谷先生: 難解な非線形力学をわかり易く講義.
 - ◆ 寺田先生: 複雑な数値解析の基礎を多彩な表現で講義.
 - ◆ 山田先生: 基礎的な有限要素の数理の原理原則を講義.
- 固体変形の非線形解析の勉強会としては高い完成度.
 - ◆ 「良質かつ硬派」な講義: 多くの支持をいただいて10年以上.
 - ◆ 参加者層の若年化

◆ 全ての参加者が十分理解できているとは限らない.

- 学術研究レベルの常識と産業界で使われる技術のギャップ
 - ◆ 微小ひずみ, 対数ひずみ ⇔ Green-Lagrangeひずみ
 - ◆ 弾塑性の加算分解 ⇔ 乗算分解.
- CAEを使う技術者は必ずしも十分な力学的基礎を学んでいるとは限らない

◆ 新しくこの分野に入ってくる若いエンジニアにとって必要な知識は？

「理解」に王道無し.

◆ 「伝熱工学」:第1章序論:庄司正弘(東大)

- 勉学の態度として, イタリアの神学者の言葉を引用.
- St. Thomas Aquinas(1225-74)がある学徒の「如何に学問すべきか」という問に答えた手紙の抜粋.

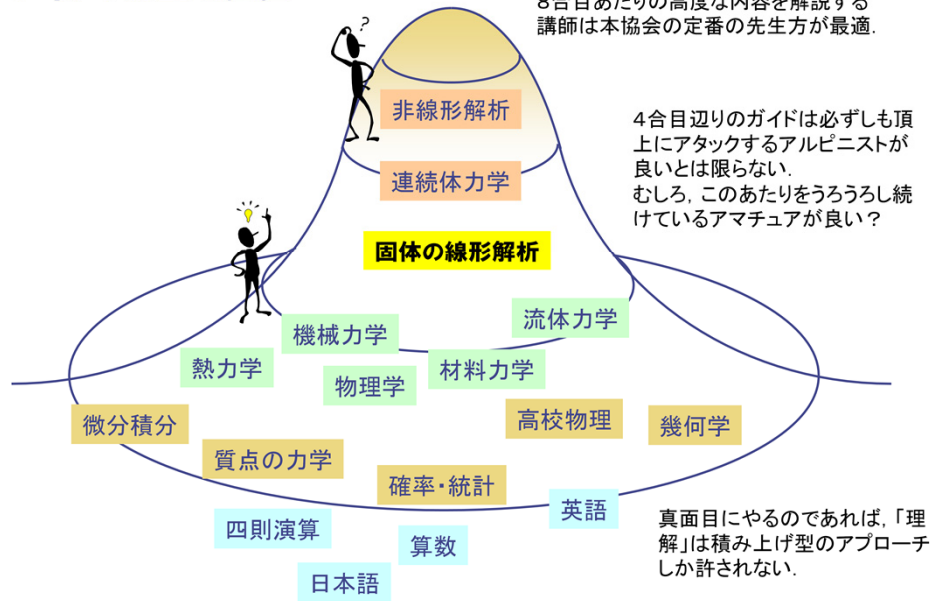
◆ (前略)..即ち, 何事も容易な事柄から始めて困難な事柄へ進むべきでありますから, あなたも河を下っていきなり, 大洋の深みへ入るようなことをなさってはなりません.

◆ (中略)..読むにも聞くにもよく理解するように努め, 疑わしいことははっきりと確かめ, できる限り多くのことを知識の蔵の棚に収めて, やがてその棚を満たすように勤勉に努力することです.



「理解の山」を登る.

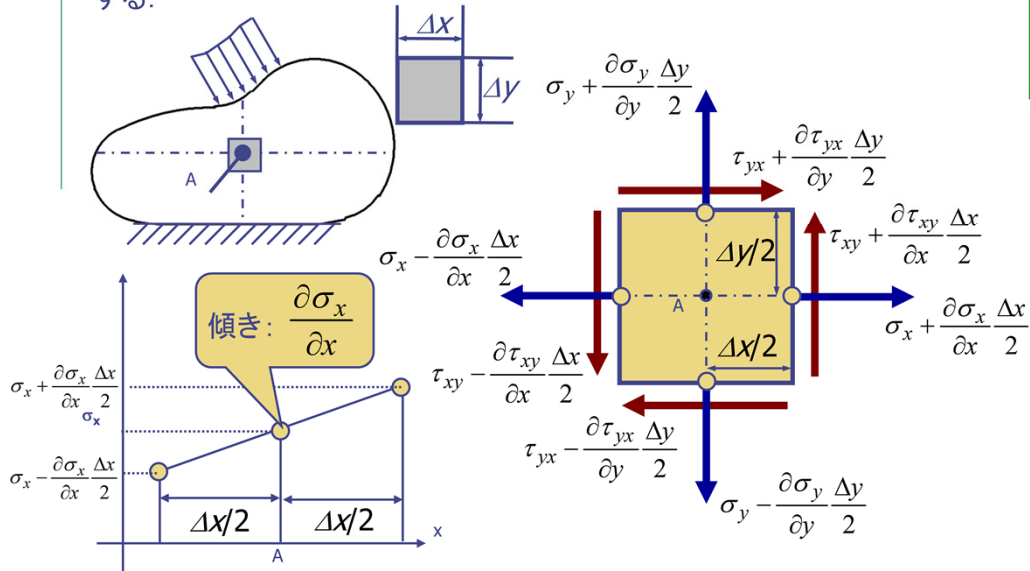
◆ 我々の立ち位置



2. 力のつりあい

微小要素: 線形分布が仮定できるぐらい小さいということ.

A点を中心とした $\Delta x \Delta y$ の微小要素を考えて、応力の線形分布を仮定する.



先に一言。「応力のつりあい」ではなくて「力のつりあい」なので、ある領域を考えてこの領域に作用している力を書き出す必要があります。ここでは、A点周りの微小要素 $\Delta x \Delta y$ を考えます。

微小領域なので、この領域の中心にあるA点の偏微分を使って容易に $\Delta x/2$ だけ離れた前後位置での応力が予想できると考えます。y方向も同様です。微小要素の各辺に作用する応力を書き出すと右の図のようになります。

【余談】

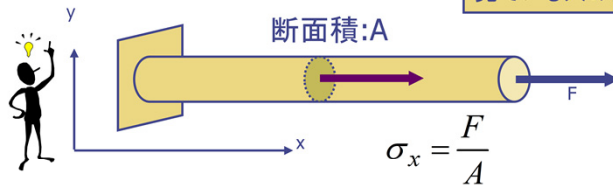
「微小ってどれぐらい？」という疑問はもっともです。「1mmは微小か？10 μm なら間違いなく微小だろう」というような答えは残念ながらありません。ここでいう「微小」とは数学的なニュアンスを含んでいるもので、考えている点(ここではA点)の微分によって、「微小」と呼んでいる範囲の分布状態が予想できる程度という意味になります。ですので、マイクロマシンの応力場を解析するのであれば、10 μm でも微小とはいえませんが、ダムを解析するのであれば10cmぐらいは微小といえます。

アパートに住んでいると、概ね上下左右の部屋の住人のことは分かるおのですが、隣の隣の様子は分かりません。線形近似というラフな予測によって、概ね予想できそうな圏内を「微小」と呼べばよいのです。

3. 応力の座標変換

応力の表現は座標軸の取り方に依存する.

●Aさんの引張り試験

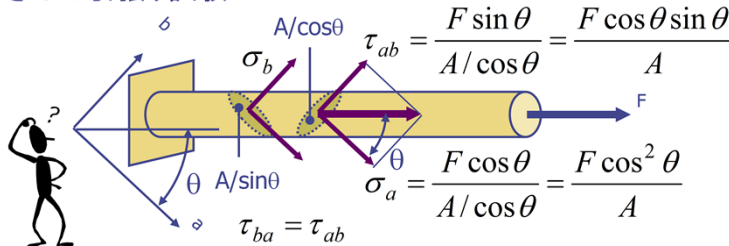


$$\sigma_x = \frac{F}{A}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

表示は全く異なるが同じ応力状態を示す.
見ている人の姿勢が異なるだけ.

●Bさんの引張り試験



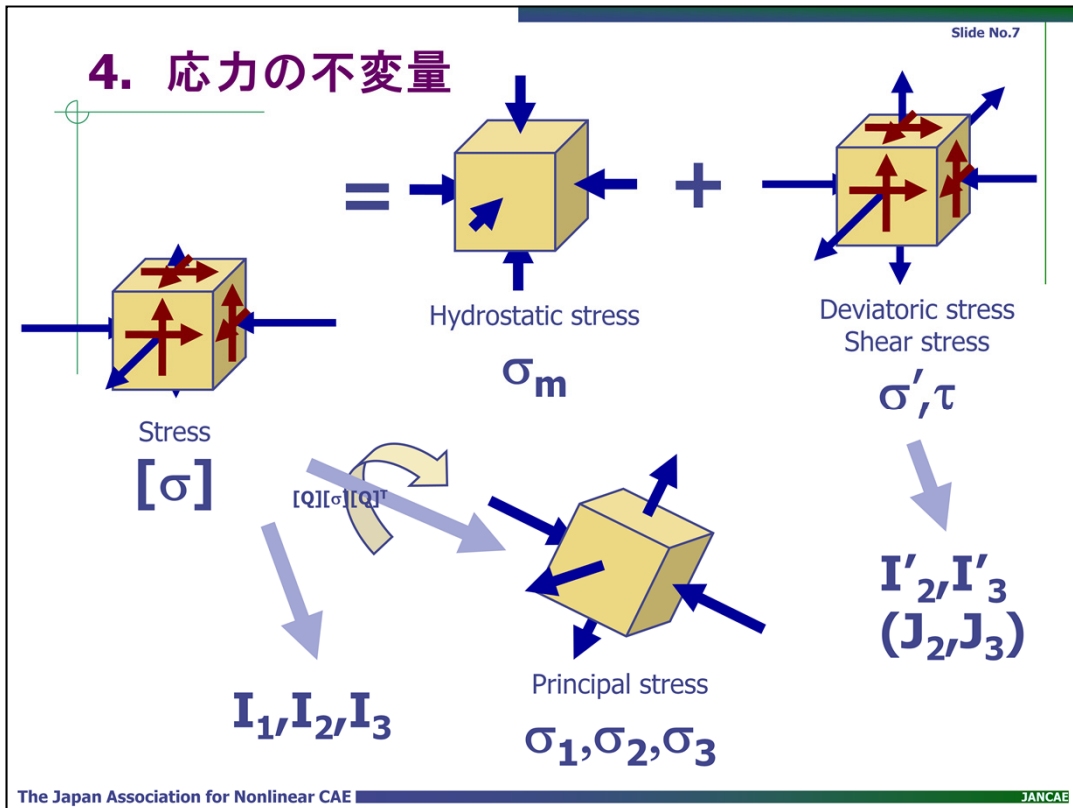
$$\tau_{ab} = \frac{F \sin \theta}{A / \cos \theta} = \frac{F \cos \theta \sin \theta}{A}$$

$$\sigma_a = \frac{F \cos \theta}{A / \cos \theta} = \frac{F \cos^2 \theta}{A}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_a & \tau_{ab} \\ \tau_{ab} & \sigma_b \end{bmatrix}$$

以上ここまでは、応力の定義と、力のつりあいから要請される応力成分同士の関係についてみてきました。ここまでの議論では座標系xyzが既にあるものとして、応力の成分を表記してきましたが、「座標系」は自然に存在するのではなく、人間(観測者)が観測の都合で勝手に決めているものに他なりません。つまり、応力の表記が座標系によって異なるということは、座標系が異なったときに応力を相互に変換できる枠組みが必要ということになります。

図は引張り試験を例にとり、引張り方向にx軸を取った、比較的素直な性格のAさんと、あえて斜めの傾いた座標系を選んだBさんの比較です。Aさんの座標系xyでは、軸方向の垂直応力しか生じていませんが、Bさんの座標系では垂直応力とせん断応力の全ての成分が作用していることとなります。



図にまとめたものです。

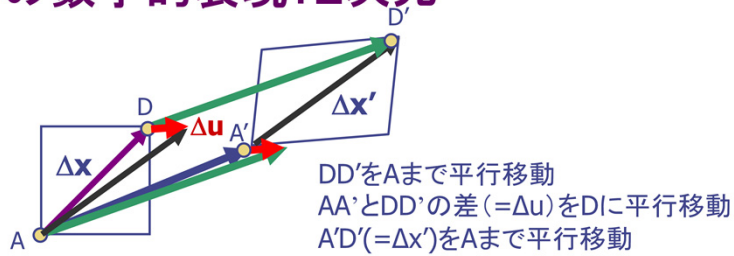
応力というのは3次元ではCauchyの第二運動法則を考えると6成分あり、見ている座標系が変わるとその値も変わってしまいます。

(下段) 応力テンソルは適当な座標変換をしてやると、主応力というせん断応力が生じない座標系に変換してやることができます。この3つの主応力はどのような座標系からでも求めることができる不変量です。この主応力を求める過程で出てくる三次方程式の係数も座標系に依存しない不変量です。

(上段) また、応力成分はバランスのよい静水応力(三つの垂直応力の平均値)とバランスの悪い偏差応力に分けられます。この偏差応力成分から不変量を定義することもでき、「偏差」ということでダッシュをつけて I'_2 や I'_3 とでも呼ぶべきものです。教科書によってはこれを J_2 や J_3 と記載していることもあります。(von Misesの降伏条件を J_2 flow と呼ぶのはこれによります。)

4. ひずみの数学的表現:2次元

単軸のイメージとの対応



$$A'D' = AD + DD' - AA'$$

$$\{\Delta x'\} = \{\Delta x\} + \{u(x+\Delta x)\} - \{u(x)\} = \{\Delta x\} + \{\Delta u\}$$

記載の定義

$$\{\Delta x'\} - \{\Delta x\} = \{\Delta u\}$$

単軸では...

$$\varepsilon_x = \frac{\text{変形後の長さ} - \text{変形前の長さ}}{\text{変形前の長さ}} = \frac{L' - L}{L} = \frac{\Delta L}{L} \quad \Rightarrow \quad \Delta L = \varepsilon_x \times L$$

二次元では...

$$\frac{\{\Delta x'\} - \{\Delta x\}}{\{\Delta x\}} = \frac{\{\Delta u\}}{\{\Delta x\}} \quad \text{ベクトルの割り算?} \quad \Rightarrow \quad \{\Delta u\} = [?]\{\Delta x\}$$

変形前の微小線素ベクトルADと、変形後の微小線素ベクトルA'D'が数式で表されたので、単軸のときのひずみの定義式に放り込んでやります。

単軸ひずみ = (変形後の長さ - 変形前の長さ) / 変形前の長さ
となおじょうにすれば

$$\begin{aligned} \text{二次元ひずみ} &= (\text{変形後の}\Delta x - \text{変形前の}\Delta x) / \text{変形前の}\Delta x \\ &= (\Delta x' - \Delta x) / \Delta x = \Delta u / \Delta x \end{aligned}$$

です... 一見うまくいきそうでしたが、ベクトルの割算になってしまいました。

ベクトルの掛け算については、内積や外積を習いますが、ベクトルの割算?となると聞いたことがありません。

このままではよくわかりませんので、一次元の式を習って

伸び = 位置次元のひずみ × 元の長さ
の形式で書き直すと、

$$\Delta u = [\text{二次元のひずみ}]\Delta x$$

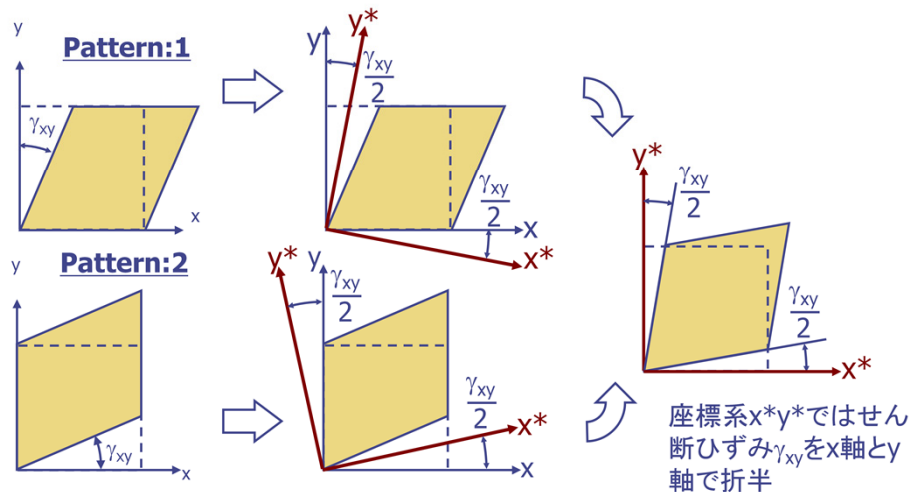
となります。これだと掛け算なので、定義できそうです。

5. 回転の除去

「回転」の除去

X軸に添わせるか,y軸に添わせるか?

せん断ひずみの等価変換:同じ変形と見るために座標系を回転させる.



まずはイメージとして、パターン1と2の変形が違って見えてしまう理由を考えます。いずれかの軸に沿った変形をしているので、違って見えるのです。ならば、これをどちらかの座標軸をエコヒイキすることなく、同じものとして見えるような見方を考えてみましょう。

パターン1では四角形の下辺がx軸にへばりつき、パターン2では左の辺がy軸にへばりついてます。このへばりつきをはがしてやって、x軸に対する下辺の角度とy軸に対する左辺の角度が同じになるような座標系を考えてやります。

このような座標系はパターン1では時計回りに $\frac{\gamma_{xy}}{2}$ だけ回転し、パターン2では反時計回りに $\frac{\gamma_{xy}}{2}$ だけ回転した座標系になります。このようなx*,y*座標系で見れば、二つの変形は(近似的に)同一の変形と見ることができます。

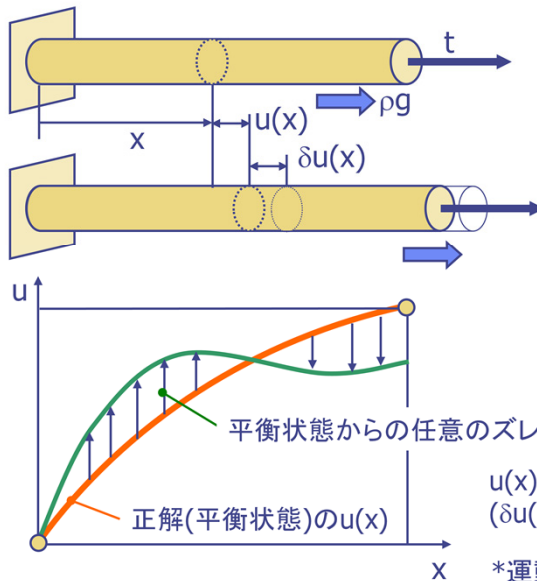
別の言い方をすると下記のようになります。

「変形のみを取り出すことは、剛体的な動きと回転を除去することである。回転を除去する指標として、すべての座標軸に対して偏見を持たない(つまり中立的な)座標軸を定義し、物体と共に回転しながらひずみを測定することにしよう。」

ということです。

3. 仮想仕事の原理のイメージ(1)

ここまでの数式展開は高校数学でも可能ですが、大切なのはイメージです。



つりあっている状態(正解の状態)を考えて、この状態から変位 u に任意のズレ δu が生じたとする。

この「ズレ δu と内力(応力)がなす仕事」は「ズレ δu と外力がなす仕事」と等しい。

平衡状態からの任意のズレ $\delta u(x)$

正解(平衡状態)の $u(x)$

$u(x) + \delta u(x)$: いろいろある解の候補*
($\delta u(0) = 0$ でないと解の候補にもならない)

*運動学的可容変位

(Kinematically Admissible displacement)

数式展開は以上ですが、大事なのはイメージです。今一度、イメージを記載します。

まず、正解の応力場と変位場があると考えます(これはまだ求まっていないのですが、想像してください)。応力は正解のまま、変位が正解からずれたと考えます。このズレ量を仮想変位 δu で表します。

ズレ δu は $u + \delta u$ が解としての資格を持つために幾何学的境界条件を規定されている領域では $\delta u = 0$ である必要があります。このような幾何学的境界条件を満たしており、解として立候補できる資格をもった変位場 $u + \delta u$ のことを運動学的可容変位場と呼びます。

このような条件の下で、仮想仕事の原理式とは、「仮想変位 δu (正解からのズレ)が材料の内部で正解の応力となす仕事(内部仮想仕事)と仮想変位 δu が外力となす仕事(外部仮想仕事)が等しい」ということを示しています。

【余談】

原理や定理の言葉は広辞苑では以下のように記載されています。

原理(principle): ものの拠って立つ根本法則。認識または行為の根本法則。他のものがそれに依存する本源的なもの。世界の根源、ある領域の事物の根本要素。

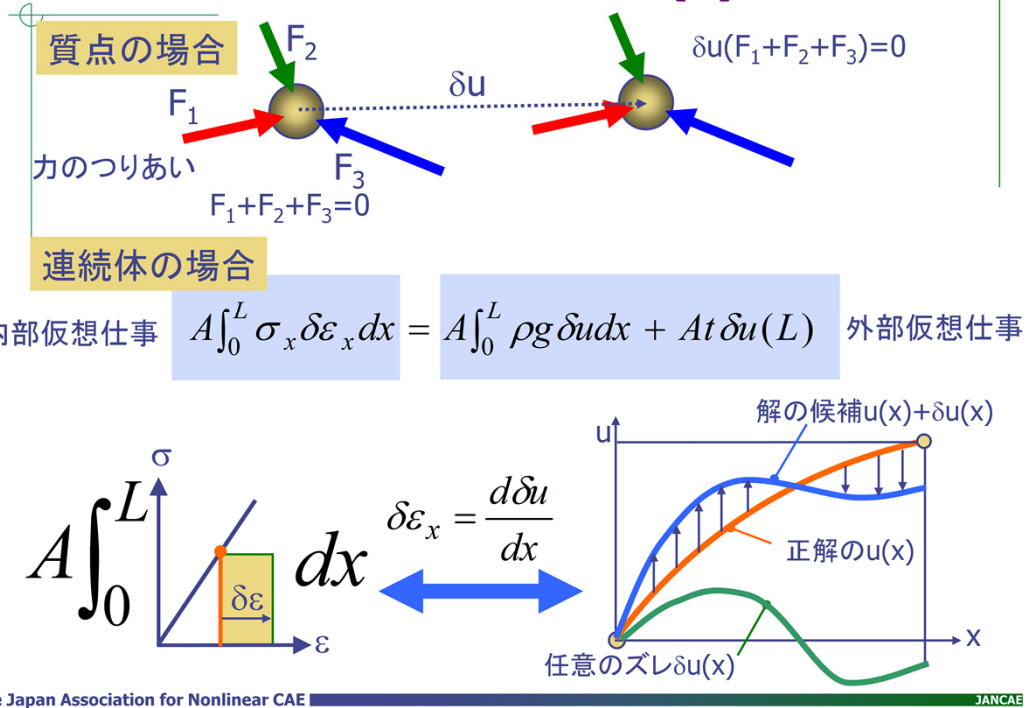
定理(theorem): すでに真なりと証明された一般的命題。公理または定義を基礎として真であると証明された理論的命題。

公理 (axiom) : 証明不可能であるとともに, また証明を必要とせず直接に自明の真として承認され他の命題の前提となる根本命題. ある理論領域で仮定される基本前提.

法則 (law) : いつでも, またどこでも, 一定の条件のもとに成立するところの普遍的・必然的關係. また, それを言い表したもの.

こう考えると, 「仮想仕事の原理」は「力のつりあい」を前提として, 数学的に真であると証明されているので「原理」というよりも「定理」に近いようです. (言葉尻です)

3. 仮想仕事の原理のイメージ(2)



質点の場合の仮想仕事の原理は極めて単純です。質点に3つの力が加わっていて、この状態でつりあい状態にあれば $F_1 + F_2 + F_3 = 0$ です。このつりあい状態は、 δu だけ動かしてみても、力が変わらなければその位置でつりあうだけのことです。

連続体力学の仮想仕事の原理も元になっているのは微小領域でのつりあい式ですので、このつりあい式を移動しても同じという概念は質点の場合と全く同じはずですが、いくつか行ってきた式変形によって内部仮想仕事と外部仮想仕事が等しいという式が得られたのです。

これは、下に示すような構造です。

外部仮想仕事は、外力の仮想変位の積を体積積分したものであり、質点の仮想仕事の原理に近い考え方と理解できると思います。(質点と異なり単位体積あたりの力である体積力になっているだけです。)

内部仮想仕事は、仮想変位 δu の空間微分として仮想ひずみ $\delta \epsilon$ を定義することで、内部に生じている正解の応力 σx と仮想ひずみ $\delta \epsilon x$ の積を考え、これを体積積分します。このように定義された内部仮想仕事と外部仮想仕事が等しいというのが仮想仕事の原理です。

ここで、仮想ひずみ $\delta \epsilon$ と仮想変位 δu はそれぞれ勝手に任意ではなく、 $\delta \epsilon = d\delta u / dx$ の関係があることに注意してください。

質点の仮想仕事の原理は直感的に間違いないことが分かりますが, 連続体の仮想仕事の原理は一見して正しいと理解することは出来ません. しかしここまでやってきた数式展開が間違っていなければあっているはずで, これは数学という道具によってこの後に使う物理のための便利な道具を手に入れたこととなります.

4. 全ポテンシャルと力のつりあい

◆ ところで、何でポテンシャルエネルギーを集めているのか？

- ポテンシャルΦから保存力Fが

$$F_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial u_i}$$

で表されるということでした。

- ポテンシャルを集めて、それぞれの力を求めると

$$F_i^A = -\frac{\partial \Phi^A}{\partial u_i} \quad F_i^B = -\frac{\partial \Phi^B}{\partial u_i} \quad \dots$$

とすれば、

$$F_i^A + F_i^B + \dots = 0 \quad \text{なので、} \quad \frac{\partial \Phi^A}{\partial u_i} + \frac{\partial \Phi^B}{\partial u_i} + \dots = 0$$

Φ^A, Φ^B...の合計をトータルポテンシャルエネルギーΦで記せば、

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_i} = 0 \quad \text{が「力のつりあい」}$$

さて、ここまでいろいろな外力や内部に蓄えられるポテンシャルを見てきました。つい夢中になって、「ポテンシャルの蒐集家」のように集めてきましたが、どうしてポテンシャルを集めているのでしたっけ？

その理由は「ポテンシャルの微分が力になる」からです。

これまでに、ポテンシャルは集めたけれど、再三、力学では一番大事だと説明した「力のつりあい」は一度も使っていません。

変分原理を使った解法においても、力学の問題である以上は「力のつりあい」以外に解くべき方程式はありません。つまり、ここでやっているのは、

1. 系を構成するポテンシャルを集めてくる。
2. それを足し合わせて全ポテンシャルを記述する。
3. 全ポテンシャルを変位で微分したものが「力」になるので、
4. これをゼロとすれば、「この系の中の力がつりあっている」ということになる。というロジックなのです。

力のつりあいといえば、「微小要素に矢印かいて...」と思っていましたが、問題を「系全体」という大枠で捉えて、ポテンシャルをあつめてきて「エイヤッと微分して、これをゼロとすれば、力のつりあい」というロジックもあるのです。本当に力学というものはよくできています。(ちょっと驚きませんか？私は目から鱗でした。)

5. 二つの原理の等価性

仮想仕事の原理:

【Logic】

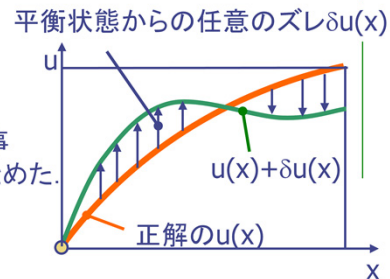
δu : 平衡状態からズレた変位(仮想変位)
 内力(応力)のする仮想仕事=外力のする仮想仕事
 微小要素の力のつりあいと力学的境界条件をまとめた.

$$A \int_0^L \sigma_x \delta \varepsilon_x dx = A \int_0^L \rho g \delta u dx + At \delta u(L)$$



結果得られる式は全く同じ

$\delta u(x)$: 正解からのズレ

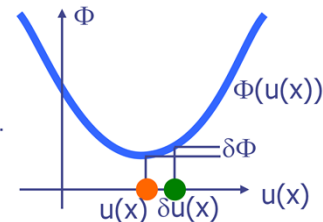


$$\delta \Phi = A \int_0^L E \varepsilon_x \delta \varepsilon_x dx - A \int_0^L \rho g \delta u dx - At \delta u(L) = 0$$

最小ポテンシャルエネルギーの原理:

【Logic】

問題を構成する物理現象のポテンシャルを定義
 全ポテンシャルの最小化が全体の力をつりあわせる.



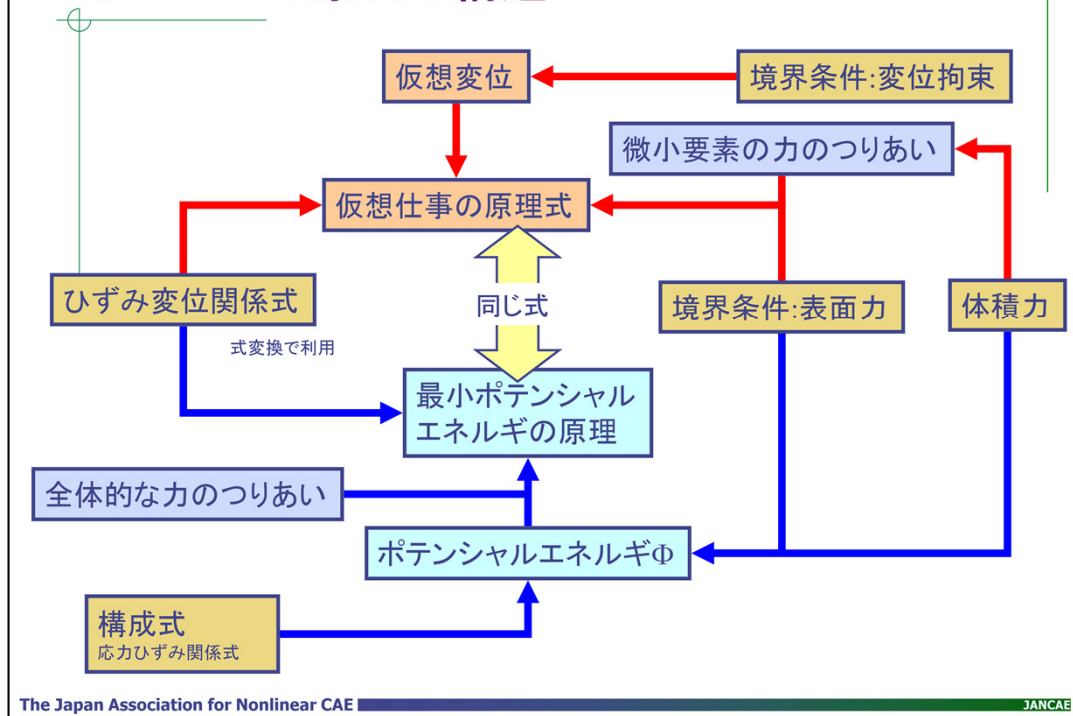
復習としてもう一度、二つの原理を比較してみましょう。結果として同じ式が得られたわけですが、考え方は大きく異なります。

仮想仕事の原理式においては、 δu は任意の仮想変位であり、正解の変位 $u(x)$ からのズレを示していました。 δu には幾何学的境界条件を満たすというシバリがあり、 $u + \delta u$ は運動学的可容変位場を意味しました。

変分原理を用いた最小ポテンシャルエネルギーの原理では、ポテンシャルの最小化という形で「系の力のつりあい」を表現しました。ここでの δu は関数 $u(x)$ の変動であり、これを「変分」と呼びます。

いずれも δu は求めるべき、解 $u(x)$ の周囲にある解の候補 $u + \delta u$ を示していることがわかります。

5. 二つの原理の構造



それぞれの原理の導出ロードマップです。

仮想仕事の原理式は式の展開上、構成式は必要ありません。仮想変位の条件として変位境界条件を使用しています。

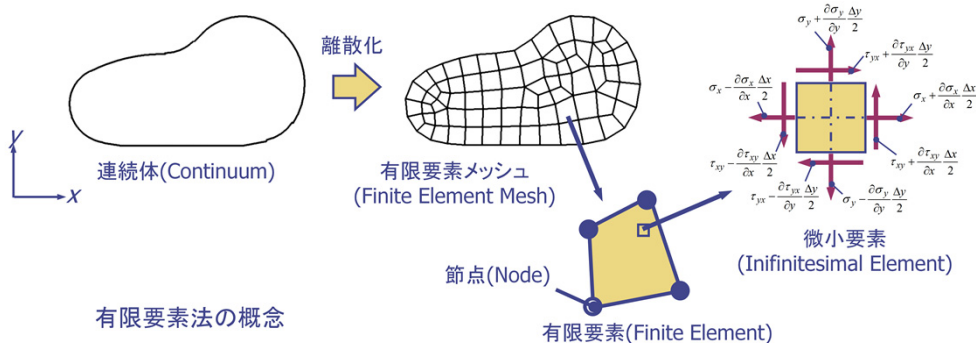
一方、最小ポテンシャルエネルギーの原理は構成式を使わないと、材料の弾性変形のポテンシャルエネルギーが定義できないので導出できません。(この段階では変位拘束は使っていません。)

いずれの問題も変位分布 $u(x)$ を変数とおいていますので、本格的に $u(x)$ を解くときに変位の境界条件を使うことになります。

0. 有限要素法の基本概念

◆ 「困難は分割せよ」

- 複雑な現象を眺めていても解法は見つからない。
 - ◆ モデル化可能なレベルまで現象を「**分解**」する。
- 力のつりあい: 微小要素(微分方程式による記述)
- 複雑形状の表現(直交格子である必要はない. 有限要素: 一般化差分法)
- 仮想仕事の原理式(領域積分による記述), 要素の重ね合わせ
 - ◆ 分解したものを「**統合**」する



有限要素法の基本的なコンセプトです。

機械系学科の基礎といえば、まずは材料力学です。材料力学でも微小要素を考へて力の釣り合いを微分方程式で表し、これを積分して梁のたわみ曲線を求めます。有限要素法の基本概念も同じです。ただし、理論解析や材料力学では、微小領域から解析領域全体へ一気に積分しますが、有限要素法ではこの間に「有限要素」というレベルの「眼で見える寸法での具体的な分割」が入ります。(力のつりあいの微小要素は抽象的な分割)

このように有限要素法では解析対象となる物体を小さな部分(必ずしも寸法的に小さい必要はありません。応力やひずみの分布の強さに応じて十分「小さく」なっていればいいのです。)に分割します。この分割したものが「要素」です。要素は二次元問題では平面なので三角形や四角形、三次元問題では三角錐や六面体の形状をしています。これらの要素は角の点の座標によって形が決まり、この角の点を「節点(せってん)」と呼びます。

このような要素ごとの式を全体に繋ぎ合わせて、全体の釣り合い式を解きます。得られた式は、残念ながら解析解のように美しくは無いので、この泥臭い計算は計算機に解かせることにします。

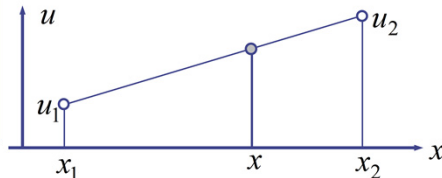
【余談】

わからないものを整理、分解して、分解されたレベルで詳細に検討して、再び統合するというロジックは、デカルトの方法序説に見られる科学的方法論です。このあたりの方法論は16世紀と現代もそんなに変わっていないように感じます。

1. 一次元の内挿補間(2)

◆ 補間関数としての形状関数

- $x_1 \sim x_2$ をひとつの要素と考えると-1~1となる座標に変換.



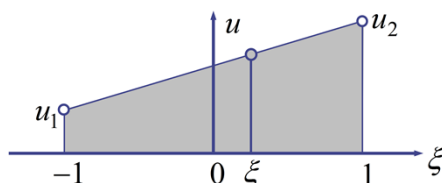
(a)全体座標系における線形内挿

x から ξ への座標変換 (形状座標 x の補間)

$$x = \frac{x_2 - x_1}{2} \xi + \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$= \frac{1 - \xi}{2} x_1 + \frac{1 + \xi}{2} x_2 \equiv \phi_1(\xi) x_1 + \phi_2(\xi) x_2$$

↓ 座標変換



(b)自然座標系における内挿

補間関数 ϕ

$$\phi_1(\xi) = \frac{1 - \xi}{2}, \quad \phi_2(\xi) = \frac{1 + \xi}{2}$$

補間関数 ϕ を用いた u の記述 (データ u の補間)

$$u = \phi_1(\xi) u_1 + \phi_2(\xi) u_2$$

話をできるだけ一般化するために、ここでは、 x_1 と x_2 の中間でゼロ、 x_1 で-1、 x_2 で+1の値を持つ正規化された座標系 ξ (自然座標系)を用います。

x 系から ξ 系への座標変換を元にして、この ξ を使って ϕ_1 と ϕ_2 という単純な関数を定義すると、 x_1 と x_2 の間の任意の点の正規化座標 ξ から、

$$u(\xi) = \phi_1 \cdot u_1 + \phi_2 \cdot u_2 = u_1(\xi - 1)/2 + u_2(\xi + 1)/2$$

で表すことができます。

興味深いのは、座標 x も変位 u もいずれも同じ形状関数を用いた内挿関数で定義できるということです。

【余談】

たかが直線近似に ϕ やら ξ やらを持ち込むあたりが、やや回りくどいように思われるかも知れませんが、一次元で一般化しておくことは、二次元や三次元へ拡張する際に意味を持ちます。

1. ひずみの算出(2)

二次元へ拡張:

$$\text{座標} \quad x = \sum_{N=1}^4 \phi_N(\xi, \eta) x_N, \quad y = \sum_{N=1}^4 \phi_N(\xi, \eta) y_N$$

$$\text{変位} \quad u_x = \sum_{N=1}^4 \phi_N(\xi, \eta) u_{xN}, \quad u_y = \sum_{N=1}^4 \phi_N(\xi, \eta) u_{yN}$$

$$\text{二次元問題のひずみ:} \quad \varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

一例として、x方向垂直ひずみ ε_x を展開。

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \left(\sum_{N=1}^4 \frac{\partial \phi_N}{\partial \xi} u_{xN} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \left(\sum_{N=1}^4 \frac{\partial \phi_N}{\partial \eta} u_{xN} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

媒介変数(ξ, η)
微分の連鎖則

一次元同様に逆関係からもとめるただし今回は「行列」となる。

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{N=1}^4 \frac{\partial \phi_N}{\partial \xi} x_N & \sum_{N=1}^4 \frac{\partial \phi_N}{\partial \eta} x_N \\ \sum_{N=1}^4 \frac{\partial \phi_N}{\partial \xi} y_N & \sum_{N=1}^4 \frac{\partial \phi_N}{\partial \eta} y_N \end{bmatrix} \equiv [J] \xrightarrow{\text{逆行列}} [J]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix}$$

では、この考え方を二次元に拡張します。二次元のひずみになると独立な座標が複数なのでひずみは「偏微分」となります。

一例として、垂直ひずみ ε_x について展開して見ます。微分の連鎖則は ξ と η という二つの座標があるので、項が二つになります。

$\partial \xi / \partial x$ や $\partial \eta / \partial x$ を求める必要がありますが、これは一次元同様に $\partial x / \partial \xi$ の逆関係から求めます。ただし、二次元になると、この逆関係は単なる逆数ではなく、行列の逆関係すなわち逆行列となることに留意が必要です。

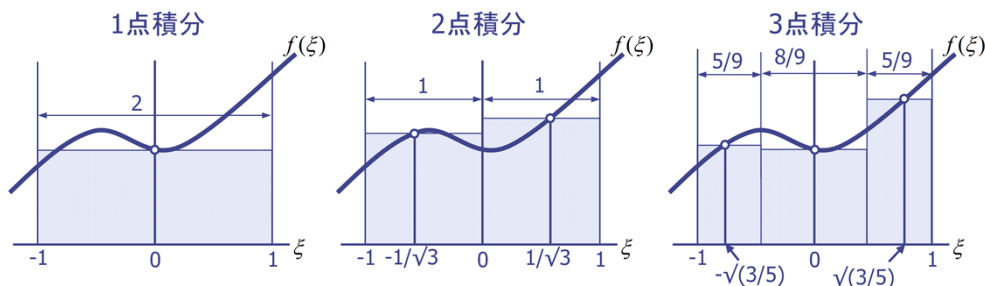
しかし使っている考え方は何一つ変わりません。(一次元は 1×1 の行列だったので、逆行列がたまたま逆数だったということです。)

2. Gauss-Legendreの積分公式(2)

◆ 積分点数によって積分精度が変わる.

- N_g 点積分では $(2N_g-1)$ 次の多項式まで正確に積分できる.

積分点数 N_g	評価点位置 ζ_i	重み w_i	
1	0	2	1次式まで
2	$-1/\sqrt{3}$	1	3次式まで
	$1/\sqrt{3}$	1	
3	$-\sqrt{3/5}$	5/9	5次式まで
	0	8/9	
	$\sqrt{3/5}$	5/9	

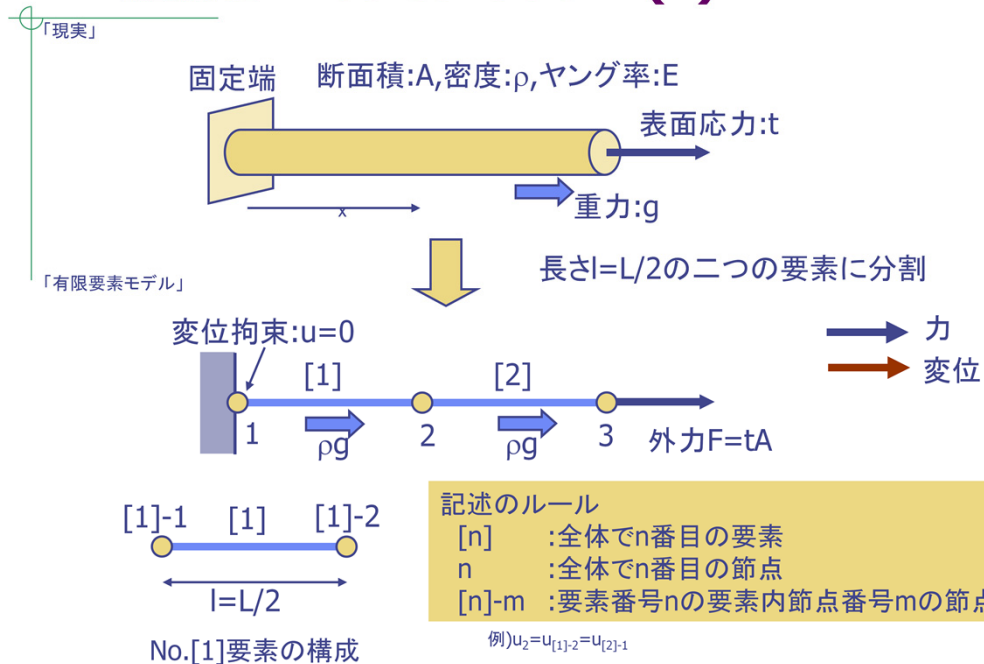


Gaussの数値積分の優れた特徴は、「ある代表点」の取り方が工夫されていて、高々二点の代表点を使った積分(すなわち長方形が二個)で、3次式まで「正確に」積分できるという点です。三点の代表点だと、3つしかない長方形で、なんと5次式まで正確に積分可能です。

逆の言い方をすれば、二点積分では3次式まで正確に積分できるように代表点(これを積分点と呼ぶ)の位置を決めているのです。積分点の位置を変数にして、解析的(紙と鉛筆での)積分と結果を比較して、同じになるように積分点の位置を求めると、上記の表の値になります。

興味のある方はやってみてください。評価点の座標はちょっとした計算で自分で導くことができます。

1. 離散化:Discretization (1)



有限要素法で最初にすべき操作は「離散化」です。

(FEMを「使う」時には要素分割:Meshingの作業です。最近のプログラムではほとんどが自動で分割してしまうようです。)

現実には微分可能な連続的な分布を持っている「連続体」を、仮想的に有限の大きさを持つ「要素」に分割します。この分割した「節」となる点を「節点」と呼びます。ここでは、一本の棒を二つの一次要素に分割します。これにより、連続体は2つの要素と3つの節点に「離散化」されたこととなります。

有限要素では、まずひとつひとつの要素について考えて、その要素の剛性を算出し、これを全体の剛性になるように重ね合わせていきます。ここでは、要素の番号を[n]のような大括弧で表します。節点番号については、「全体での節点番号」と「要素での節点番号」の二つの方法で表現します。前者は括弧無のnで、後者は[n]-mの形で[n]番要素を構成する節点の中でのm番目の節点と表現します。例えば真ん中の節点は、全体の節点番号ではn=2ですが、同時に[1]番要素の第2節点([1]-2)であり、さらに[2]番要素の第1節点([2]-1)でもあります。

【余談】

要素内節点番号:場所が変われば役割が変わります。私も会社では技術者ですが、家では父親です。

1. 要素剛性方程式(5)

得られた式の解釈

$$\frac{AE}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{[1]-1} \\ u_{[1]-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Al\rho g}{2} \cdot 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{[1]-1}^R \\ F_{[1]-2}^Q \end{bmatrix}$$

左辺:

弾性棒をバネと見なすと

$$\frac{F}{A} = \sigma = E\varepsilon = E\frac{u}{l} \text{ より } F = \frac{AE}{l}u \equiv ku$$

つまり左辺の係数行列はバネ定数と同じであるため「剛性行列:Stiffness matrix」と呼ぶ。

$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ の部分:

この部分は変位の差をとっており、与えた変位に対してバネの反力が計算される仕掛けになっている。例えば、 $u_{[1]-1}$ を固定して、 $u_{[1]-2}$ に正の値を入れると節点[1]-1には負の力が、節点[1]-2には正の力が生じる(引張られる)。

右辺:

第一項は、 $Al\rho g$ が体積を ρ が比重を示すので $Al\rho g=mg$ であり、これを節点に1/2ずつ振り分けたものを意味する。このような振り分けた力を等価節点力(Equivalent nodal force)という

第二項は要素に対して外力をベクトル状に並べたもの。

以上より、右辺は外部から加えられた「力」を節点に配分したものを意味する。

$$\text{簡略化して } [K_{[1]}][u_{[1]}] = [F_{[1]}]$$

[要素剛性行列][節点変位ベクトル]=[等価節点力ベクトル]

数式展開は例によって高校数学ですが、大切なのは物理です。得られた式をよく見て見ましょう。

左辺の AE/l は、よく見ると、一要素分の棒をバネとみなしたときのバネ定数 k を表していることとなります。行列の部分は巧妙にできていて、二つの節点の変位から、相対的な伸びを算出して、それぞれの節点でのバネによる力(内部に変形による力:内力)を算出しています。

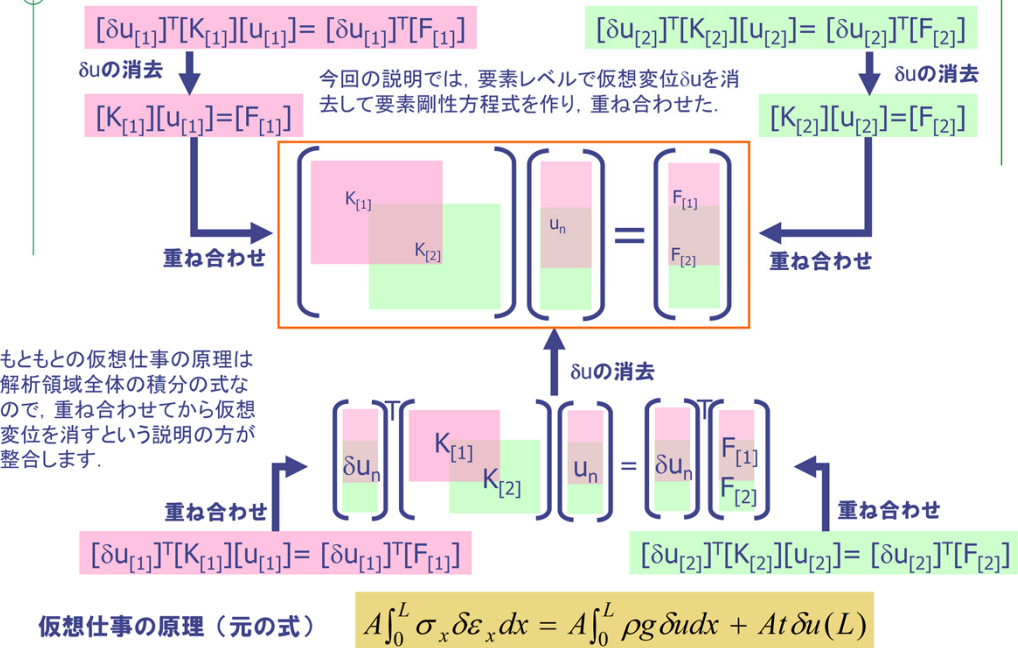
右辺の第一項は $Al\rho g$ という一要素にかかる重力を半分ずつにして二つの節点に振り分けています。このように本来は連続体に分布して作用していた力を、積分して、適切に節点に振り分けたものを「等価節点力」と呼びます。右辺の第二項はまさに節点に直接作用する外力のベクトルです。つまり右辺は節点にかかる外力のベクトルです。

これを簡略化すると、「要素の剛性行列(バネ定数もどき)」・「節点変位」=「外力の等価節点力」となります。これはまさにバネの $ku=f$ を行列化しただけであることに気づきます。つまり、離散化されたひとつの有限要素の方程式は節点変位をベクトル状に並べるため、バネ定数の部分が行列になることを除けば、 $ku=f$ と全く同じなのです。

このように有限要素法の根底には「バネモデル」があることが分かります。慣れ親しんだバネの $ku=F$ が、ベクトルや行列という大学の講義らしい「衣」をまとって再

度現れたのです.

1. 全体剛性方程式への重ね合わせ(3a)



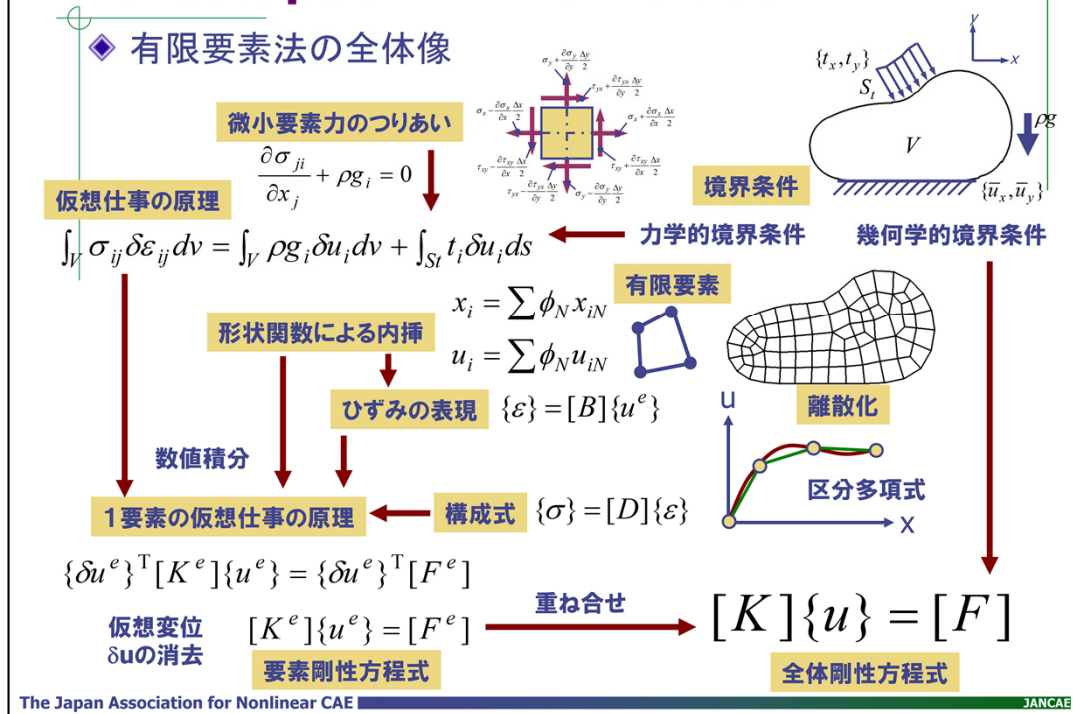
閑話休題:

今回の説明では、要素レベルでの仮想仕事の原理式が出来た段階で、両辺の仮想変位を消去し、要素ごとの「要素剛性方程式」を作成して、これを重ね合わせることで全体剛性方程式を作りました。

仮想仕事の原理式のもともとの式を考えると、解析対象となる領域全体での積分となっています。この式を正確に展開するのであれば、要素ごとの仮想仕事の原理式を作ったあとに、これを重ね合わせて全体の仮想仕事の原理式を求めて、ここで、仮想変位を消去します。

最終的に得られる全体剛性方程式は全く同じですが、理論にこだわる方は、後者の方法の方がすっきりと納得できると思います。プログラム内部の手順としては、前者に近いので前者で説明をしました。(後者の場合は要素剛性方程式という考え方が入る余地がありません。)

Landscape of FEM formulation



有限要素法の全体像を簡単にまとめておきましょう。(いろいろ書きすぎてまとまっていませんね....)

力学の問題の基本は「力のつりあい」です。問題は具体的に形状と境界条件(力学的境界条件と幾何学的境界条件)によって記述されます。

力のつりあいと力学的境界条件を弱形式でまとめたものが仮想仕事の原理です。式をまとめることができたのはよかったです。任意の関数として仮想変位を含んでいるところが玉に傷です。

一方、有限要素法は問題の解(ここでは変位ベクトル)を、単純な区分多項式で近似する解法です。今回は多項式として一次関数を主に使いました。

高々、線形近似ですが、節点の空間座標と変位の内挿に形状関数という仕組み(データの重み)を使うことで、要素内での微分が可能になります。変位の空間微分が計算できるということは、ひずみが計算できることとなります。

これにひずみと応力の関係式である構成式を加えると、ひとつの要素についての仮想仕事の原理式を数値的に積分してもとめることができます。

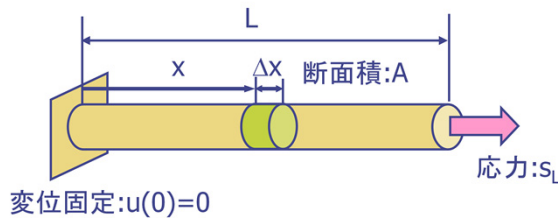
任意の仮想変位に対して(1要素の)仮想仕事の原理式を満足するためには、要素剛性方程式が成立すればよいこととなります。(ここで任意の関数であった仮想変位が消えます。)

この要素剛性方程式を重ね合わせて、全体剛性方程式を作り、幾何学的境界条件を用いることで、変位を求めるための連立一次方程式をつくることができます。この巨大な連立一次方程式を解けば、変位が求まるという仕組みです。

変位が求まったあとは、**[B]**を使ってひずみが求まり、**[D]**を使って応力を求めることができます。応力から内力を計算して、外力と比較して計算が間違っていないこともチェックしましょう。

一次元固体力学の世界

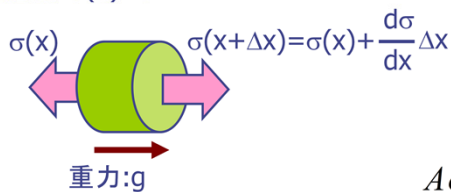
基礎的な一次元の棒の引張り問題を考える



Hookeの法則

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{du}{dx}$$

ひずみと変位の関係式を代入



力のつりあい

$$A\sigma = A\left(\sigma + \frac{d\sigma}{dx} \Delta x\right) + \rho g A \Delta x$$

$$0 = \frac{d\sigma}{dx} + \rho g$$

まずは、これまで復習してきた一次元の固体力学の世界を見てみます。一次元限定なので、棒の引張り問題です。具体的には棒が天井から吊るされていて、下端に引張り応力 s_L が作用しています。棒の質量密度を ρ として棒の自重も考えることにしましょう(重力加速度は g)。

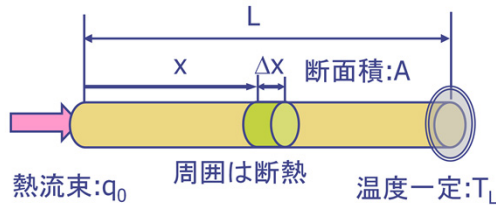
力学の世界で拠り所となるのは力のつりあいです。左面の応力を σ とすれば、微小量 Δx だけ離れたところの応力は $\sigma + d\sigma/dx \Delta x$ となります。力のつりあいは応力に面積を乗じて「力」に直して、右向きの矢印の総和と左向きの矢印の総和をイコールで結びます。微小要素に作用する自重による力は、微小量 Δx の体積 $A\Delta x$ に密度 ρ をかけて質量にして、これに重力加速度 g をかけてやります。整理すると下段のような式になります。

また、応力 σ とひずみ ε の関係式は有名なHookeの法則で表されます。さらにひずみと変位の関係から上段の式が得られます。(ひずみが変位 u の位置 x による微分で表されるというくだりは、「変位とひずみ」の関係でやりましたので、ここでは詳しく説明しません。)

「Hookeの法則」と「力のつりあい」を並列に示しましたが、物理的な意味での位置づけは異なるように思います。力のつりあいはどのような物体でも満たさねばならない力学の原則ですが、Hookeの法則は、「金属で降伏前の特性」とか「ゴムの1%以内の変形」とかいろいろな条件下で初めて正しいといえる法則です。つまり後者は実験事実に基づいたただの経験則に他なりません。

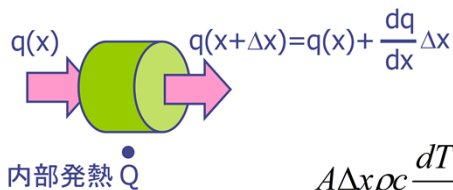
一次元熱伝導の世界

基礎的な一次元の熱伝導の問題を考える



Fourierの法則

$$q = -\lambda \frac{dT}{dx}$$



熱量保存則

$$A\Delta x\rho c \frac{dT}{dt} = Aq - A\left(q + \frac{dq}{dx}\Delta x\right) + A\Delta x\dot{Q}$$

$$\rho c \frac{dT}{dt} = -\frac{dq}{dx} + \dot{Q}$$

つぎに、機械系であれば、比較的馴染みやすい熱伝導の世界の復習です。

比較的簡単な問題として、棒の一端の温度を一定に維持しつつ、他端の断面に一定の熱流束を与える問題を考えます。棒の内部での発熱もあるものとして、端面を除いて断熱されているとしましょう。

伝熱の世界の最も根底にある式は「熱量保存則」です。言葉で言えば、入ってくる熱量と出て行く熱量があり、残った熱量はその領域の温度上昇となるということになります。熱流束はベクトルですので、 x の正方向を正にとると、左側から入ってきて、右側から出て行きます(これが正の流れです)。微小領域を考えると、入ってくる熱量を Aq とすれば出て行く熱量が $A(q+dq/dx\Delta x)$ となり、単位体積単位時間あたりの発熱量を \dot{Q} とすれば、下段のような熱量保存則が記述できます。これは「熱量がつりあわなければならない」という物理的な要請からくる「普遍性のある原則: バランス」の式です。

一方、Fourierの法則は熱伝達率を λ として、上段のように記述できます。これも物理で習いますが、これは「法則」とは呼ばれていますが、実験結果から経験則として、成立しているものです。あくまでも実験結果として確認されているだけであって、熱量保存則のような普遍性は一般にはありません。(かといって、熱が温度勾配の坂を上ることは熱力学的にありません。)

材料の特性を含む、一種の構成式といえるでしょう。

追記:

熱流束は正方向をx軸上を取ればベクトルとして, 微小要素の右面も左面も正方向は右向き
の矢印(\rightarrow)となります. 一方, 前述の応力の符号の定義は「考えている面に垂直な
法線を考えてこれと一致している応力を正とする」というものですので, 左面で左向き
の矢印(\leftarrow), 右面で右向き
の矢印(\rightarrow)となります. これに注意.

固体力学と熱伝導の式:類似

◆ 得られた方程式は全く同じ！

- 変数や式の意味の対応表は以下のとおり.

	熱伝導	固体力学
解の関数	T:温度	u:変位
解の1階微分	∇T :温度勾配	ε :ひずみ
特徴的な材料特性	λ :熱伝導率	E:Young率
1階微分×材料特性	q:熱流束	σ :応力
原理的な物理則	熱量保存則	力のつりあい
経験的な物理則	Fourier則	Hooke則
境界条件(第一種)	T_L :温度固定	u_0 :変位固定
(第二種)	q_0 :熱流束既知	s_L :応力既知

全くことなる物理現象が、同じ式になる...狐につままれたような気がします。

類似点の対比を見てみます。表を見ていただければ納得していただけると思います。固体力学のひずみに対する類似変数は「温度勾配」というやや素っ気無い変数になっています。この「解の1階微分」に特徴的な材料特性を乗じると別の物理的な変数が出てきます。この式が「経験的な物理法則(構成則)」です。これに対して「原理的な物理法則」は「何らかのバランス」を示した式になっていることも共通しています。問題を具体低に解くための境界条件についても類似しています。

いかがでしょうか？物理学はよくできていると思いませんか？

追記1:

基礎的な境界条件には二種類あります。第一種境界条件(基本境界条件またはDirichlet条件)は解の関数そのものを規定する境界条件であり、解くべき関数の温度Tや変位uを固定するものです。これに対して、解くべき関数の一階微分を規定する境界条件を第二種境界条件(自然境界条件またはNeumann条件)と呼びます。第二種境界条件の場合は、解の二階微分に何らかの係数を乗じて(伝熱であれば熱伝導率をかけて熱流束、固体力学であればヤング率をかけて応力)物理的に意味のある変数の形で与えられます。

追記2:

熱伝導では表面の対流熱伝達として $q = -h(T - T_{env})$ という式をよく使います。これを固体力学に適用するとどのようになるのでしょうか？上記のスライドを参考に

すると $\sigma=k(u-ua)$ のような形になると想像できます。これは変形体を何かフカフカするパッドの上に置いたときの境界条件を示しています。つまりフカフカのパッドにめり込むとめり込んだ分だけ押し返してくるという境界条件になります。(このような支持は「弾性床」と呼ばれます。)

熱伝導の輻射に相当する固体力学の境界条件はありませんが、あえて言えば「4次の非線形特性を持つ弾性床」ということになります。

固体力学と熱伝導の式: 相違

- ◆ 仮定のもとで得られた方程式は全く同じだが、
 - 熱伝導での仮定:
 - ◆ 「定常状態」にある.
 - ◆ 非定常であれば, 温度変化項 $c_p dT/dt$ を含む.
 - 固体力学での仮定:
 - ◆ 物体が「静的なつりあい状態」にある.
 - ◆ 動的なつりあい状態であれば, 加速度項 $\rho d^2u/dt^2$ を含む.
- ◆ 明瞭な差異:
 - 動的(または非定常)に含まれる時間微分項:
 - ◆ 伝熱では1階微分 dT/dt , 固体では2階微分 d^2u/dt^2 となる.
 - 2または3次元に拡張すると.....
 - ◆ 固体: 変位 u はベクトル, 応力 σ とひずみ ε は2階のテンソル, 材料特性(応力ひずみ関係式)は4階のテンソル.
 - ◆ 伝熱: 温度 T はスカラー, 熱流束 q と温度勾配 ∇T はベクトル, 熱伝導率 λ は(実は一般的には)2階のテンソル.

共通項を探して, 理解を広げるということと同時に, 差異を明確にすることで, それぞれの物理現象の特徴的な現象を説明することもできます. 仮定の下で得られた式は全く同じでしたが, どのような仮定をおいたのかを確認しておきましょう.

固体の場合は明確には述べておりませんが, 静的なつりあい (Static equilibrium) を仮定しています. これを仮定しない場合は Newton の運動方程式の意味での力のつりあいとなり, 加速度項を考慮しなければなりません. 固体力学では加速度項を含む場合を動力学 (Dynamics) と呼びます.

伝熱の場合は定常問題を仮定して, 考えている領域に入ってくる熱量と出て行く熱量を等しいとしました. これが等しくない場合は領域の温度が時間変化する非定常問題となります. では固体力学で加速度項を考える動力学として, 伝熱で非定常を考えても同じ式になるのでしょうか?

残念ながら同じ式にはなりません. 加速度は変位の二階時間微分(時間の一階微分が速度で, さらにもう一回時間微分して加速度)ですが, 温度変化は時間の一階微分です. これが, 固体問題では振動があるのに, 伝熱問題では振動が生じないことを意味しています. (応力波という言葉は聞いたことがありますが, 熱流束波という言葉は聞いたことがありませんね. 熱は波にはなりません.)

また, 大きな違いがもうひとつあります. これまでは意図的に1次元問題を扱ってきましたが, 二次元, 三次元になるとどうでしょうか?

決定的な違いは, 変位 u が大きさを持つベクトル変数であるのに対して, 温度 T が大きさしか持たないスカラー変数であることです. このため, 温度の空間勾配はベクトル ∇T となるのに対して, 変位の空間微分は変位勾配 (Displacement gradient) となり(回転を除去することで)ひずみという二階のテンソル(行列)となります. 応力も行列ですから, 二つの二階のテンソルを関係付ける式は四階のテンソルとなります (Hooke の法則は連続体力学では四階のテンソルで現されます). このように考えると, Fourier の法則にも別の顔が見えます. つまり, 均質で等方な物体でない場合 (例えば結晶の方位で熱の伝わり方が異

なるか積層材のような構造)は熱伝導率はひとつのスカラ値ではなく、熱流束ベクトル q と温度勾配ベクトル ∇T を関係づける二階のテンソル(行列)となるということです。

いかがでしょうか？類似点を見ることで二つの異なる物理現象の共通的な解き方(解くべき変数は何か？境界条件はどのように与えるべきか？)がイメージできます。一方、相違点を明確にすることで、その物理現象の独特の振る舞いを説明することができ、相似的に拡張することで、物理変数や材料特性のテンソルとしての階数まで想像することができます。

現象のアナロジー

- ◆ 物理現象を記述する方程式
 - ひとつの物理現象について,
 - ◆ 「何かのバランス」を記述した原理的な式.
 - 保存則, つりあい式...
 - ◆ 「異なる物理変数の関係」を記述した経験式.
 - その現象を特徴付ける材料特性を含む式.
 - 通常, 発見者の名前を冠することが多い.
 - が存在する.

- ◆ 数式モデルの等価性: 同じ解法が適用可能
 - よって数値解法を議論する時には「方程式の型」が重要視される.
 - ◆ 楕円型・双曲型・放物型

- ◆ 難解な数式を振り回すことが目的ではない.
 - 類似点の利用:
 - ◆ 類似問題からの拡張および理解の転用・応用.
 - 相違点の利用
 - ◆ 数式モデルの解釈の違いにその物理現象の本質が隠れている.

最後にコメントです.

くれぐれも申し上げます. 研究や開発にとって大事なことは「難解な数式を振り回すこと」ではありません. 対象としている現象をより深く理解することです.

物理現象をよりクリアに理解するために,

- 1 まずは一分野をしっかりと修めること.
 - 2 新しい現象を相手にするときには, ゼロスタートではなく, 既に修めた土台をうまくつかって, イメージを膨らませることができる.
- という例えです.

ポイントは,

何を解いているのか(固体力学では変位 u , 伝熱では温度 T)?

その空間微分は何か(固体ではひずみや応力, 伝熱では温度勾配や熱流束)?

拠り所となる原理式(バランスの式)と物性を含む経験式(構成式)は何か?

このような現象のアナロジーを見てとることが出来るのは我々が「数学」という言葉を持っているからです.(数学も含めた言葉というのは人類最大の発明かも知れません.)

私の話は, 以上です.