rev.0 2012/05/18：非線形CAE勉強会(第21期) 基礎勉強会「固体の線形解析」(中央大学駿河台記念館)
rev.0.1 2012/10/09：非線形CAE勉強会(第22期) 基礎勉強会「固体の線形解析」(トヨタ産業技術記念館)
rev.0.2 2013/05/17：非線形CAE勉強会(第23期) 基礎勉強会「固体の線形解析」(東海大学高輪キャンパス)

基礎勉強会「固体の線形解析」

FEM Basic Seminar :
Linear Analysis of Solid Mechanics For the Rest of Us

日本工業大学 機械工学科 瀧澤英男
htaki@nit.ac.jp

これは，webでダウンロードするテキストpdfの抜粋サンプルです．

基礎勉強会「固体の線形解析」

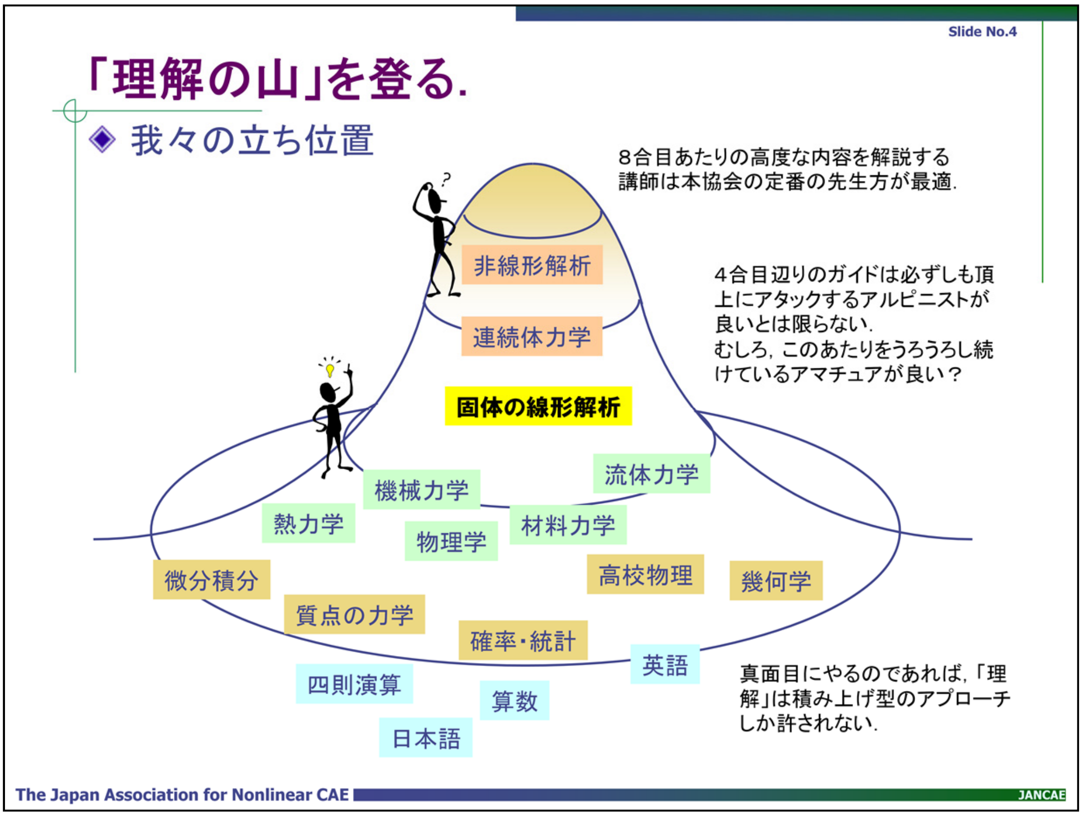
- 「基礎勉強会」開催の動機
  - 非線形CAE勉強会の定番講義
    - 京谷先生：難解な非線形力学をわかり易く講義.
    - 寺田先生：複雑な数値解析の基礎を多彩な表現で講義.
    - 山田先生：基礎的な有限要素の数理の原理原則を講義.
  - 固体変形の非線形解析の勉強会としては高い完成度.
    - 「良質かつ硬派」な講義：多くの支持をいただいて10年以上.
    - 参加者層の若年化

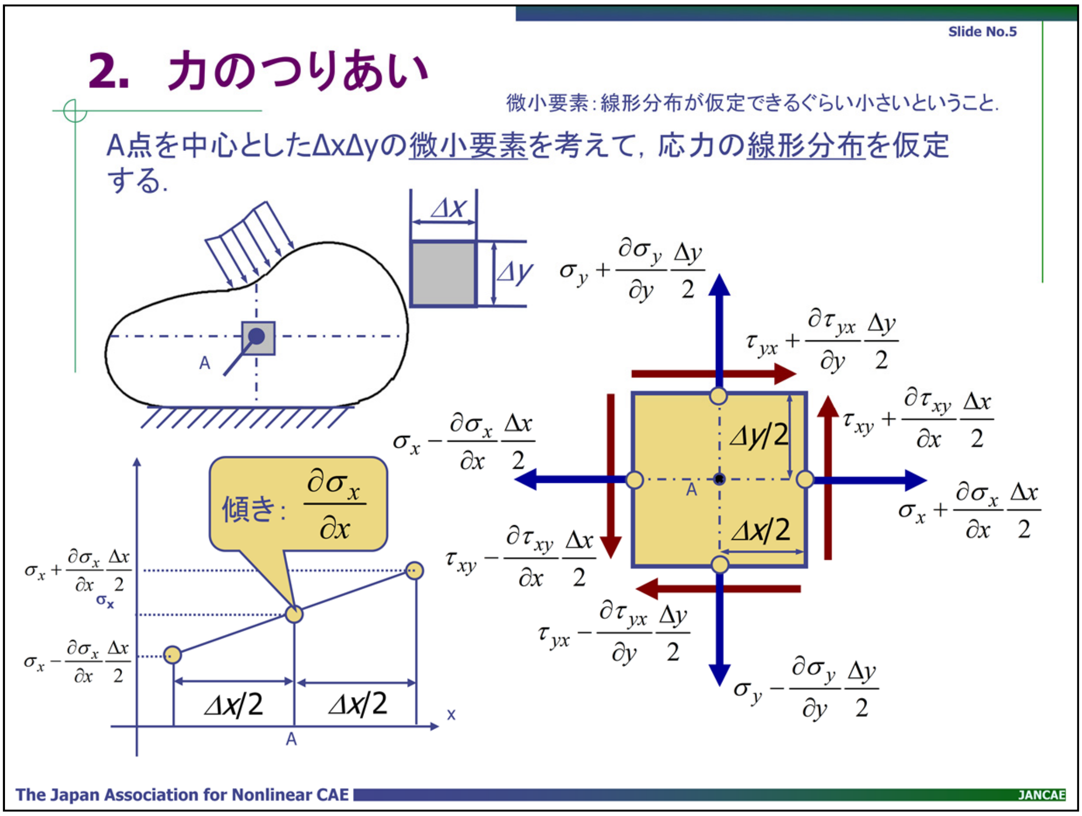
- 全ての参加者が十分理解できているとは限らない.
  - 学術研究レベルの常識と産業界で使われる技術のギャップ
    - 微小ひずみ，対数ひずみ　⇔　Green-Lagrangeひずみ
    - 弾塑性の加算分解　⇔　乗算分解.
  - CAEを使う技術者は必ずしも十分な力学的基礎を学んでいるとは限らない.

- 新しくこの分野に入ってくる若いエンジニアにとって必要な知識は？

「理解」に王道無し.

- 「伝熱工学」:第１章序論：庄司正弘(東大)
  - 勉学の態度として，イタリアの神学者の言葉を引用.
  - St. Thomas Aquinus(1225-74)がある学徒の「如何に学問すべきか」という問に答えた手紙の抜粋.
- (前略)..即ち，何事も容易な事柄から始めて困難な事柄へ進むべきでありますから，あなたも河を下っていきなり，大洋の深みへ入るようなことをなさってはなりません.
- (中略)..読むにも聞くにもよく理解するように努め，疑わしいことははっきりと確かめ，できる限り多くのことを知識の蔵の棚に収めて，やがてその棚を満たすように勤勉に努力することです.


Slide No.4
「理解の山」を登る.
◆ 我々の立ち位置
8合目あたりの高度な内容を解説する
講師は本協会の定番の先生方が最適.
4合目辺りのガイドは必ずしも頂
上にアタックするアルピニストが
良いとは限らない.
むしろ，このあたりをうろうろし続
けているアマチュアが良い？
非線形解析
連続体力学
固体の線形解析
機械力学
流体力学
熱力学
物理学
材料力学
微分積分
高校物理
幾何学
質点の力学
確率・統計
英語
四則演算
算数
日本語
真面目にやるのであれば，「理
解」は積み上げ型のアプローチ
しか許されない.
The Japan Association for Nonlinear CAE
JANCAE



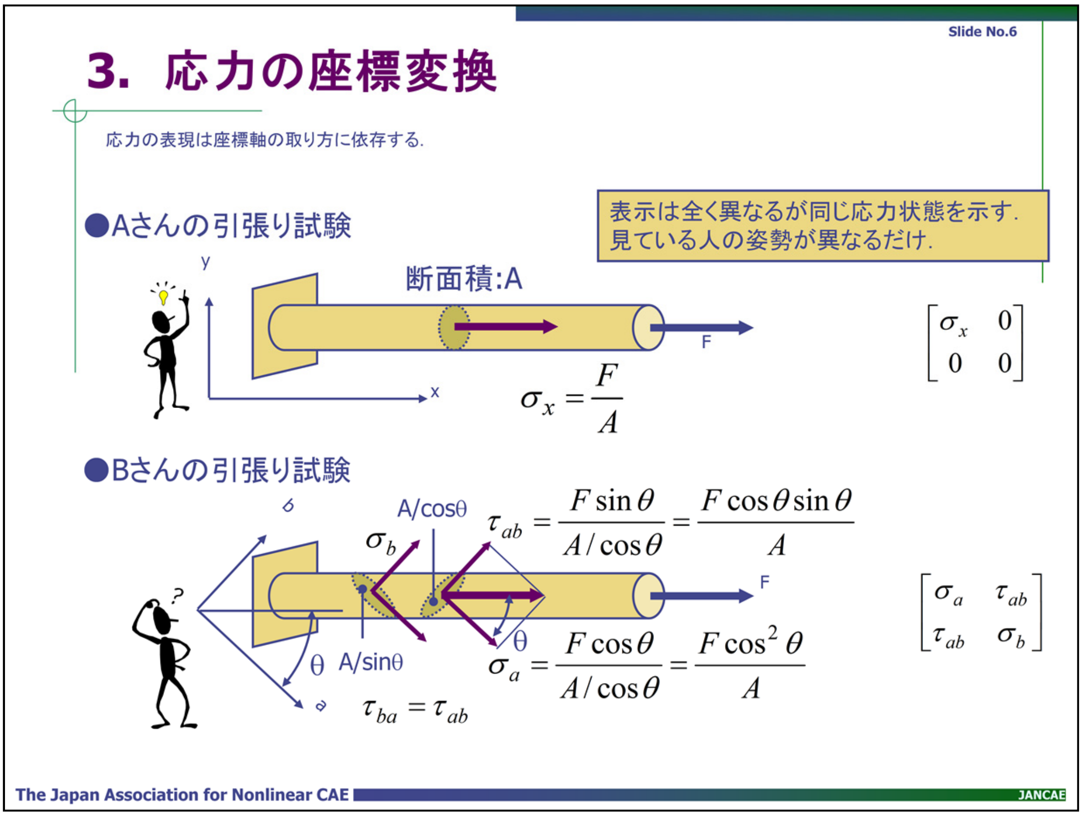
先に一言.「応力のつりあい」ではなくて「力のつりあい」なので，ある領域を考えてこの領域に作用している力を書き出す必要があります. ここでは，A点周りの微小要素ΔxΔyを考えます.

微小領域なので，この領域の中心にあるA点の偏微分を使って容易にΔx/2だけ離れた前後位置での応力が予想できると考えます. y方向も同様です. 微小要素の各辺に作用する応力を書き出すと右の図のようになります.

【余談】

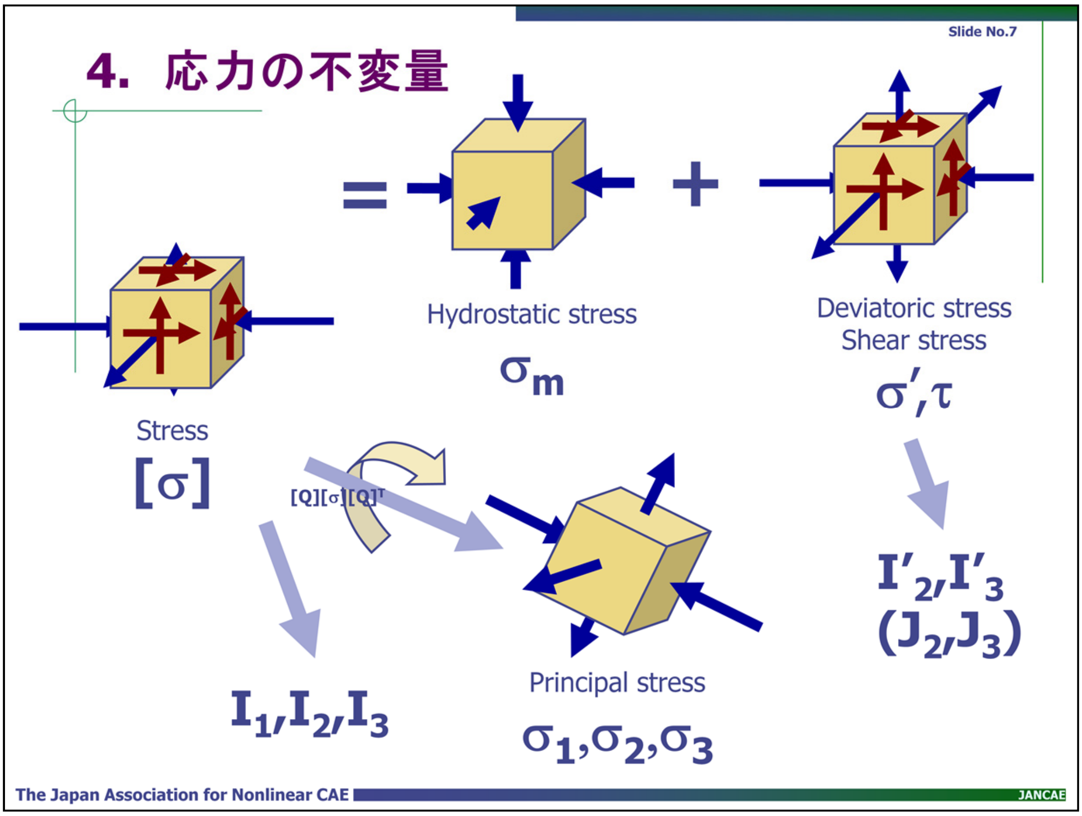
「微小ってどれぐらい？」という疑問はもっともです.「1mmは微小か？10μmなら間違いなく微小だろう」というような答えは残念ながらありません. ここでいう「微小」とは数学的なニュアンスを含んでいるもので，考えている点（ここではA点）の微分によって，「微小」と呼んでいる範囲の分布状態が予想できる程度という意味になります. ですので，マイクロマシンの応力場を解析するのであれば，10μmでも微小とはいえませんが，ダムの解析をするのであれば10cmぐらいは微小といえます.

アパートに住んでいると，概ね上下左右の部屋の住人のことは分かるおのですが，隣の隣の様子は分かりません. 線形近似というラフな予測によって，概ね予想できそうな圏内を「微小」と呼べばよいのです.



以上ここまでは，応力の定義と，力のつりあいから要請される応力成分同士の関係についてみてきました．ここまでの議論では座標系xyzが既にあるものとして，応力の成分を表記してきましたが，「座標系」は自然に存在するのではなく，人間（観測者）が観測の都合で勝手に決めているものに他なりません．つまり，応力の表記が座標系によって異なるということは，座標系が異なったときに応力を相互に変換できる枠組みが必要ということになります．

図は引張り試験を例にとって，引張り方向にx軸を取った，比較的素直な性格のAさんと，あえて斜めの傾いた座標系を選んだBさんの比較です．Aさんの座標系xyでは，軸方向の垂直応力しか生じていませんが，Bさんの座標系では垂直応力とせん断応力の全ての成分が作用していることになります．

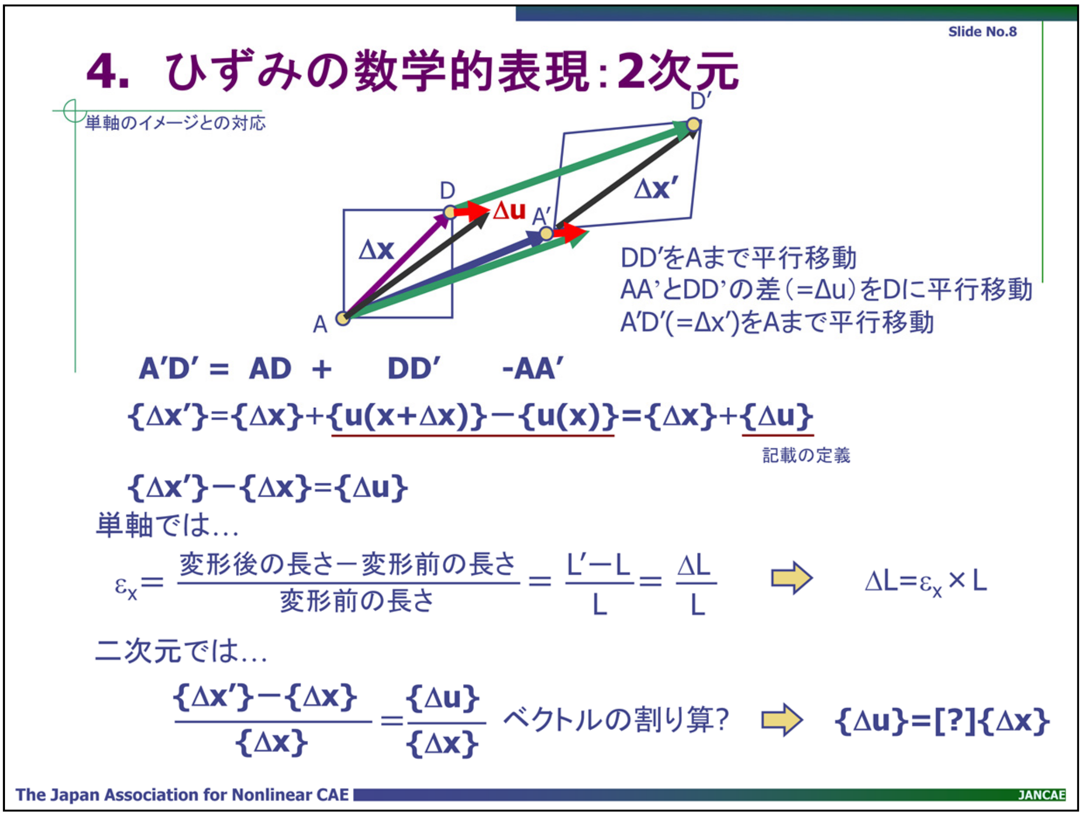


図にまとめたものです．

応力というのは3次元ではCauchyの第二運動法則を考えると6成分あり，見ている座標系が変わるとその値も変わってしまいます．

（下段）応力テンソルは適当な座標変換をしてやると，主応力というせん断応力が生じない座標系に変換してやることができます．この3つの主応力はどのような座標系からでも求めることができる不変量です．この主応力を求める過程で出てくる三次方程式の係数も座標系に依存しない不変量です．

（上段）また，応力成分はバランスのよい静水応力（三つの垂直応力の平均値）とバランスの悪い偏差応力に分けられます．この偏差応力成分から不変量を定義することもでき，「偏差」ということでダッシュをつけてI’2やI’3とでも呼ぶべきものです．教科書によってはこれをJ2やJ3と記載していることもあります．（von Misesの降伏条件をJ2 flowと呼ぶのはこれによります．）



変形前の微小線素ベクトルADと，変形後の微小線素ベクトルA’D’が数式で表されたので，単軸のときのひずみの定義式に放り込んでやります．

単軸ひずみ＝(変形後の長さ－変形前の長さ)／変形前の長さ

となおじようにすれば

二次元ひずみ＝(変形後のΔx－変形前のΔx)／ 変形前のΔx

＝(**Δx’**－**Δx**)／**Δx** ＝**Δu**／**Δx**

です．．．一見うまくいきそうでしたが，ベクトルの割算になってしまいました．

ベクトルの掛け算については，内積や外積を習いますが，ベクトルの割り算？となると聞いたことがありません．

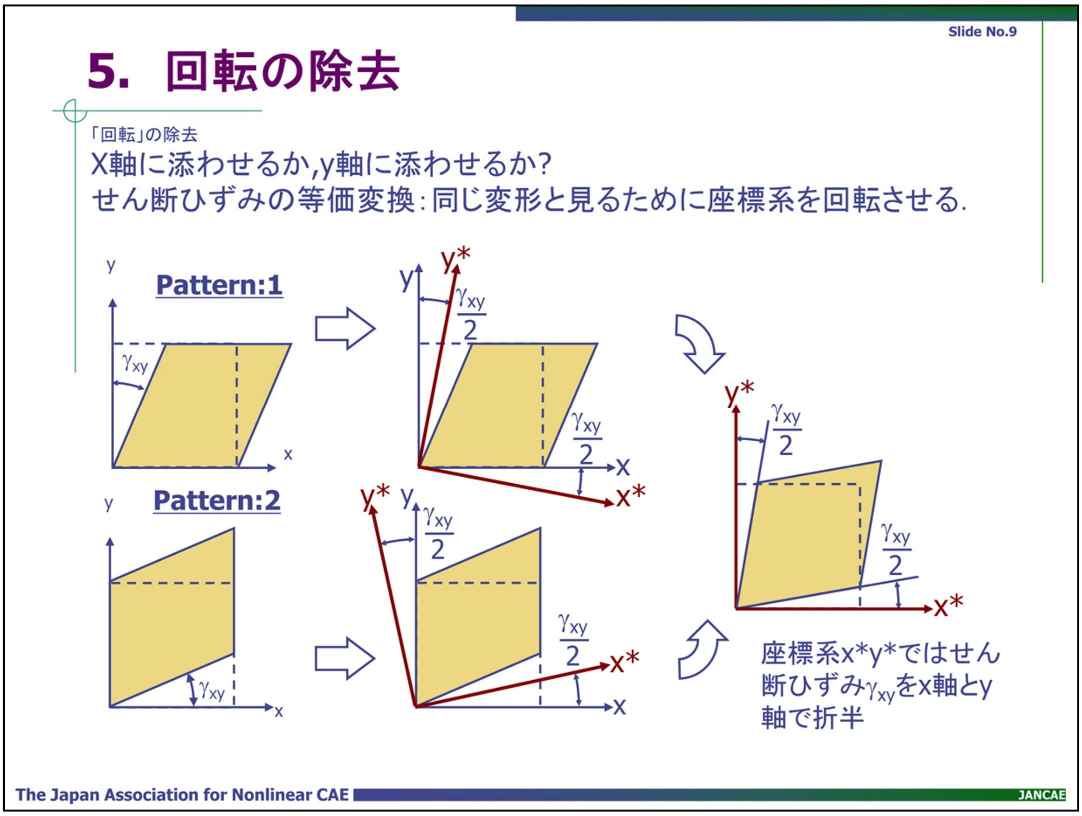
このままではよくわかりませんので，一次元の式を習って

伸び＝位置次元のひずみ×元の長さ

の形式で書き直すと，

Δu ＝[二次元のひずみ]**Δx**

となります．これだと掛け算なので，定義できそうです．



まずはイメージとして，パターン1と2の変形が違って見えてしまう理由を考えます．いずれかの軸に沿った変形をしているので，違って見えるのです．ならば，これをどちらかの座標軸をエコヒイキすることなく，同じものとして見えるような見方を考えてみましょう．

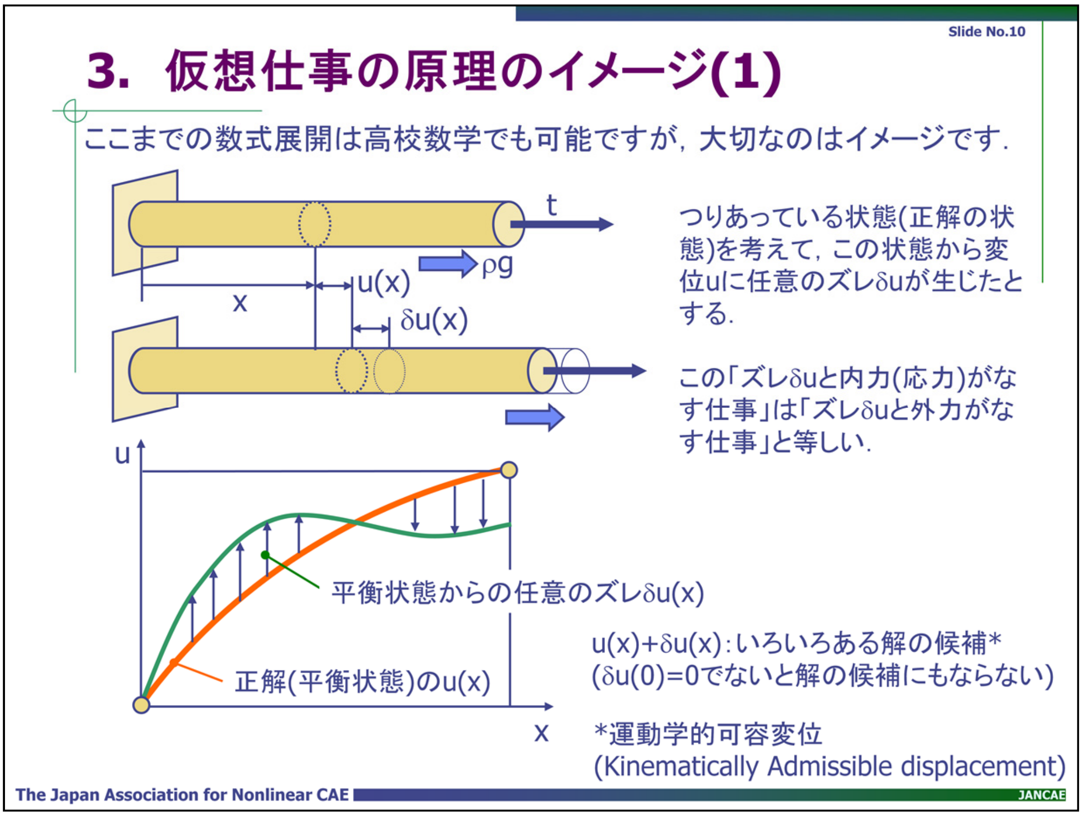
パターン1では四角形の下の辺がx軸にへばりつき，パターン2では左の辺がy軸にへばりついています．このへばりつきをはがしてやって，x軸に対する下辺の角度とy軸に対する左辺の角度が同じになるような座標系を考えてやります．

このような座標系はパターン1では時計回りにγxy/2だけ回転し，パターン2では反時計回りにγxy/2だけ回転した座標系になります．このようなx*,y*座標系でみれば，二つの変形は（近似的に）同一の変形と見ることができます．

別の言い方をすると下記のようになります．

「変形のみを取り出すことは，剛体的な動きと回転を除去することである．回転を除去する指標として，すべての座標軸に対して偏見を持たない（つまり中立的な）座標軸を定義し，物体と共に回転しながらひずみを測定することにしよう．」

ということです．



数式展開は以上ですが，大事なのはイメージです．今一度，イメージを記載します．

まず，正解の応力場と変位場があると考えます（これはまだ求まっていないのですが，想像してください）．応力は正解のまま，変位が正解からずれたと考えます．このズレ量を仮想変位δuで表します．

ズレδuはu+δuが解としての資格を持つために幾何学的境界条件を規定されている領域ではδu=0である必要があります．このような幾何学的境界条件を満たしており，解として立候補できる資格をもった変位場u+δuのことを運動学的可容変位場と呼びます．

このような条件の下で，仮想仕事の原理式とは，「仮想変位δu（正解からのズレ）が材料の内部で正解の応力となす仕事（内部仮想仕事）と仮想変位δuが外力となす仕事（外部仮想仕事）が等しい」ということを示しています．

【余談】

原理や定理の言葉は広辞苑では以下のように記載されています．

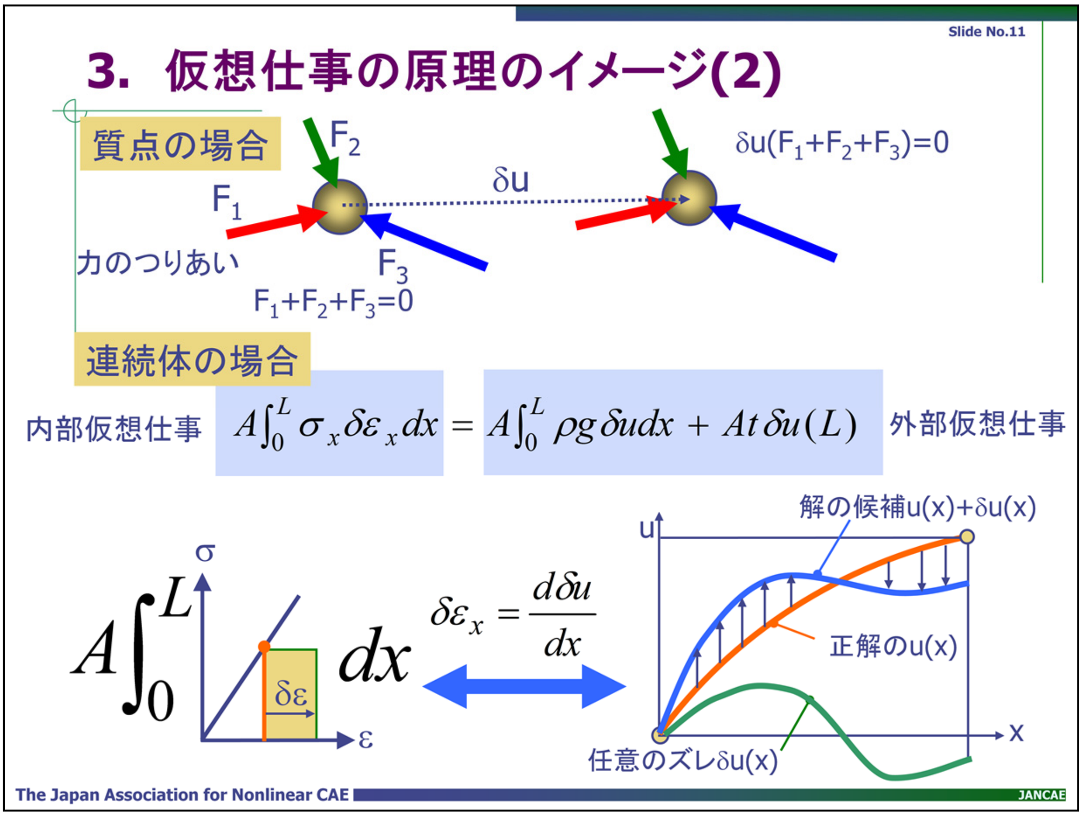
原理（principle）：ものの拠って立つ根本法則．認識または行為の根本法則．他のものがそれに依存する本源的なもの．世界の根源，ある領域の事物の根本要素．

定理（theorem）：すでに真なりと証明された一般的命題．公理または定義を基礎として真であると証明された理論的命題。

公理（axiom）：証明不可能であるとともに，また証明を必要とせず直接に自明の真として承認され他の命題の前提となる根本命題．ある理論領域で仮定される基本前提．

法則（law）：いつでも，またどこででも，一定の条件のもとに成立するところの普遍的・必然的関係．また，それを言い表したもの．

こう考えると，「仮想仕事の原理」は「力のつりあい」を前提として，数学的に真であると証明されているので「原理」というよりも「定理」に近いようです．（言葉尻です）



質点の場合の仮想仕事の原理は極めて単純です．質点に3つの力が加わっていて，この状態でつりあい状態にあれば$F_1+F_2+F_3=0$です．このつりあい状態は，δuだけ動かしてみても，力が変わらなければその位置でつりあうだけのことです．

連続体力学の仮想仕事の原理も元になっているのは微小領域でのつりあい式ですので，このつりあい式を移動しても同じという概念は質点の場合と全く同じはずです．しかし，いくつか行ってきた式変形によって内部仮想仕事と外部仮想仕事が等しいという式が得られたのです．

これは，下に示すような構造です．

外部仮想仕事は，外力の仮想変位の積を体積積分したものであり，質点の仮想仕事の原理に近い考え方と理解できると思います．（質点と異なり単位体積あたりの力である体積力になっているだけです．）

内部仮想仕事は，仮想変位δuの空間微分として仮想ひずみδεを定義することで，内部に生じている正解の応力σxと仮想ひずみδεxの積を考え，これを体積積分します．このように定義された内部仮想仕事と外部仮想仕事が等しいというのが仮想仕事の原理です．

ここで，仮想ひずみδεと仮想変位δuはそれぞれ勝手に任意ではなく，δε＝dδu/dxの関係があることに注意してください．

質点の仮想仕事の原理は直感的に間違いないことが分かりますが，連続体の仮想仕事の原理は一見して正しいと理解することは出来ません．しかしここまでやってきた数式展開が間違っていなければあっているはずです．これは数学という道具によってこの後に使う物理のための便利な道具を手に入れたことになります．

Slide No.12

4. 全ポテンシャルと力のつりあい

◈ ところで，何でポテンシャルエネルギを集めているのか？

- ポテンシャルΦから保存力**F**が

$$F_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial u_i}$$

で表されるということでした．

- ポテンシャルを集めて，それぞれの力を求めると

$$F_i^A = -\frac{\partial \Phi^A}{\partial u_i} \qquad F_i^B = -\frac{\partial \Phi^B}{\partial u_i} \qquad .....$$

とすれば，

$$F_i^A + F_i^B + \ldots = 0 \quad \text{なので，} \quad \frac{\partial \Phi^A}{\partial u_i} + \frac{\partial \Phi^B}{\partial u_i} + \cdots = 0$$

Φ^A, Φ^B...の合計をトータルポテンシャルエネルギΦで記せば，

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_i} = 0$$

が「力のつりあい」

The Japan Association for Nonlinear CAE　JANCAE

さて，ここまでいろいろな外力や内部に蓄えられるポテンシャルを見てきました．つい夢中になって，「ポテンシャルの蒐集家」のように集めてきましたが，どうしてポテンシャルを集めているのでしたっけ？

その理由は「ポテンシャルの微分が力になる」からです．

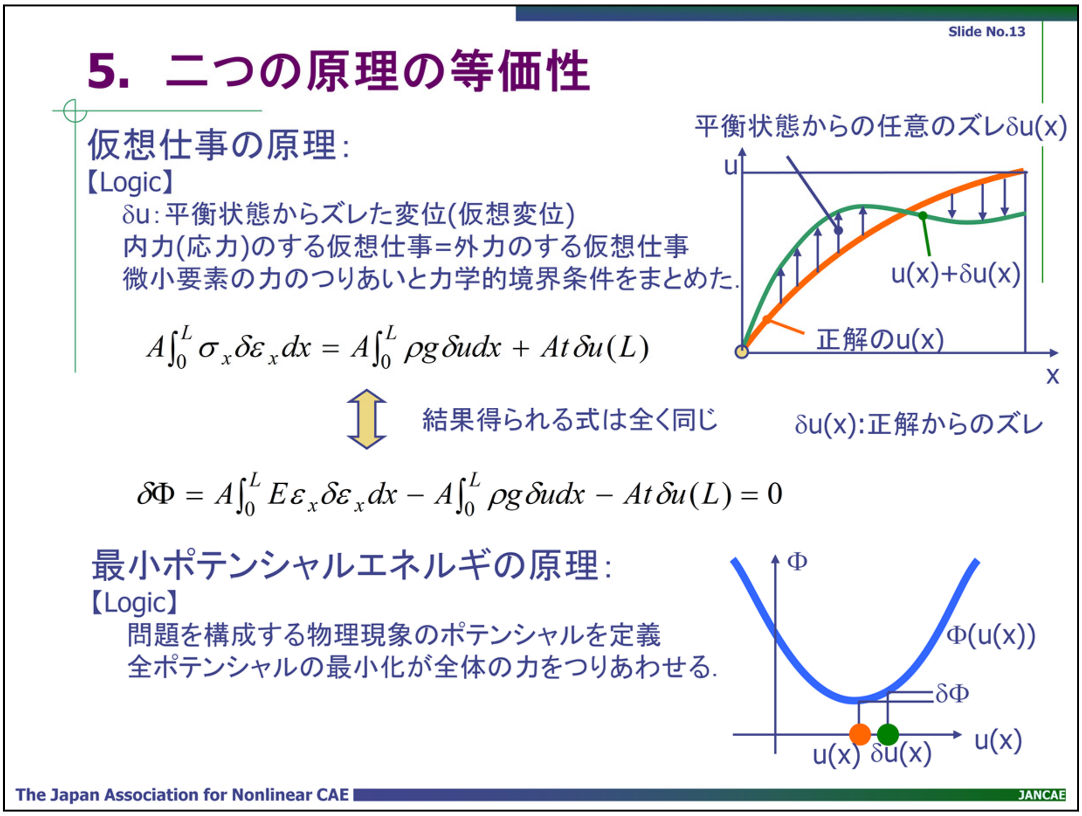
これまでに，ポテンシャルは集めたけれど，再三，力学では一番大事だと説明した「力のつりあい」は一度も使っていません．

変分原理を使った解法においても，力学の問題である以上は「力のつりあい」以外に解くべき方程式はありません．つまり，ここでやっているのは，

1. 系を構成するポテンシャルを集めてくる．
2. それを足し合わせて全ポテンシャルを記述する．
3. 全ポテンシャルを変位で微分したものが「力」になるので，
4. これをゼロとすれば，「この系の中の力がつりあっている」ということになる．

というロジックなのです．

力のつりあいといえば，「微小要素に矢印かいて…」と思っていましたが，問題を「系全体」という大枠で捉えて，ポテンシャルをあつめてきて「エイヤッと微分して，これをゼロとすれば，力のつりあい」というロジックもあるのです．本当に力学というものはよくできています．（ちょっと驚きませんか？私は目から鱗でした．）

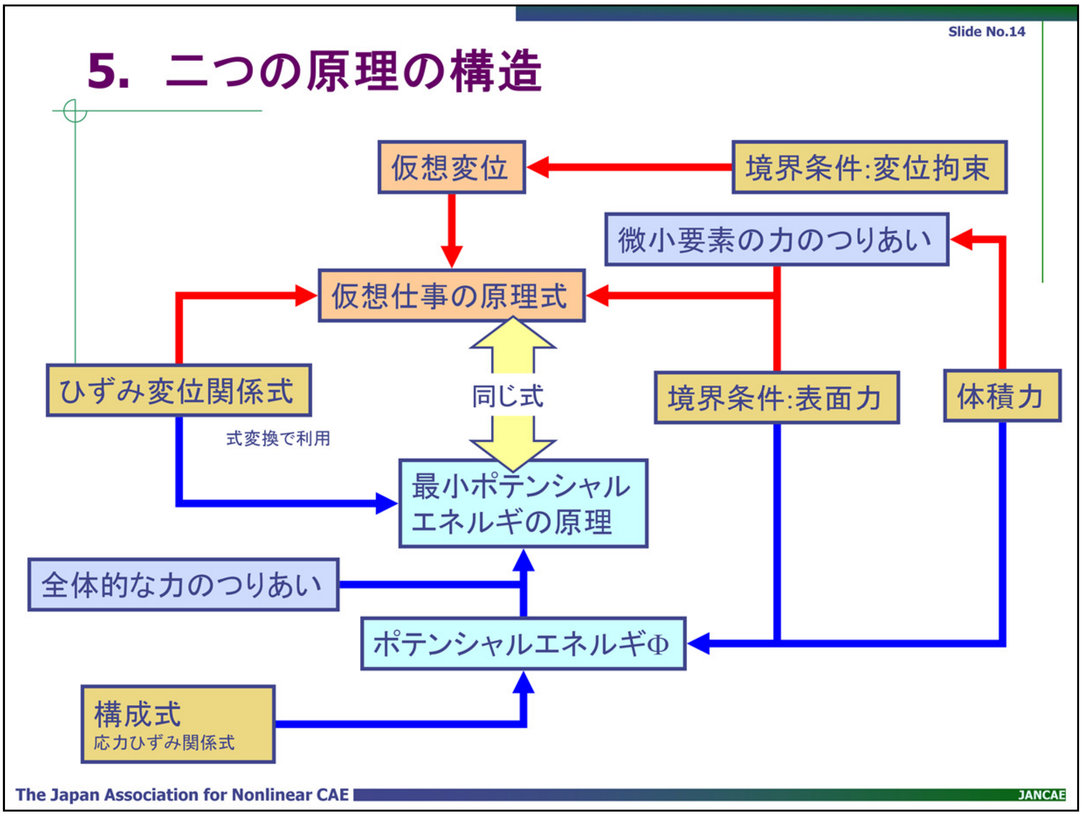


復習としてもう一度，二つの原理を比較してみましょう．結果として同じ式が得られたわけですが，考え方は大きく異なっています．

仮想仕事の原理式においては，δuは任意の仮想変位であり，正解の変位u(x)からのズレを示していました．δuには幾何学的境界条件を満たすというシバリがあり，u+δuは運動学的可容変位場を意味しました．

変分原理を用いた最小ポテンシャルエネルギの原理では，ポテンシャルの最小化という形で「系の力のつりあい」を表現しました．ここでのδuは関数u(x)の変動であり，これを「変分」と呼びます．

いずれもδuは求めるべき，解u(x)の周囲にある解の候補u+δuを示していることがわかります．

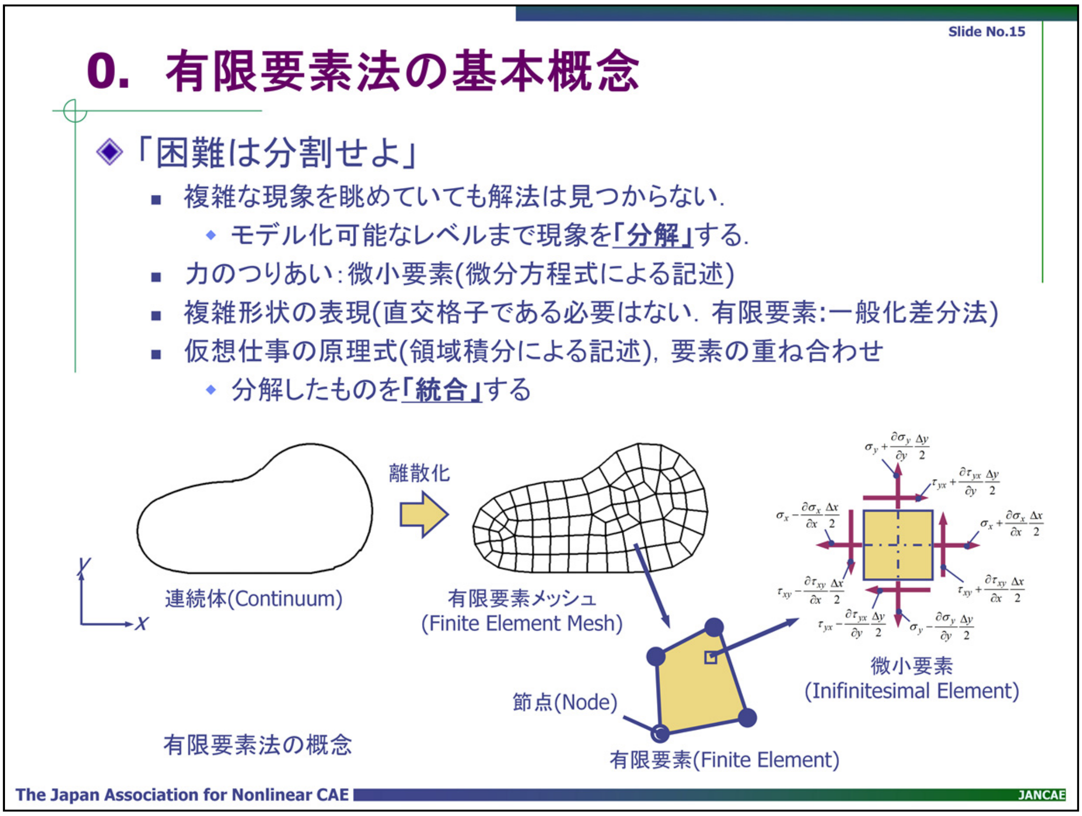


それぞれの原理の導出ロードマップです.

仮想仕事の原理式は式の展開上，構成式は必要ありません．仮想変位の条件として変位境界条件を使用しています.

一方，最小ポテンシャルエネルギの原理は構成式を使わないと，材料の弾性変形のポテンシャルエネルギが定義できないので導出できません．（この段階では変位拘束は使っていません．）

いずれの問題も変位分布u(x)を変数とおいていますので，本格的にu(x)を解くときに変位の境界条件を使うことになります.



有限要素法の基本的なコンセプトです.

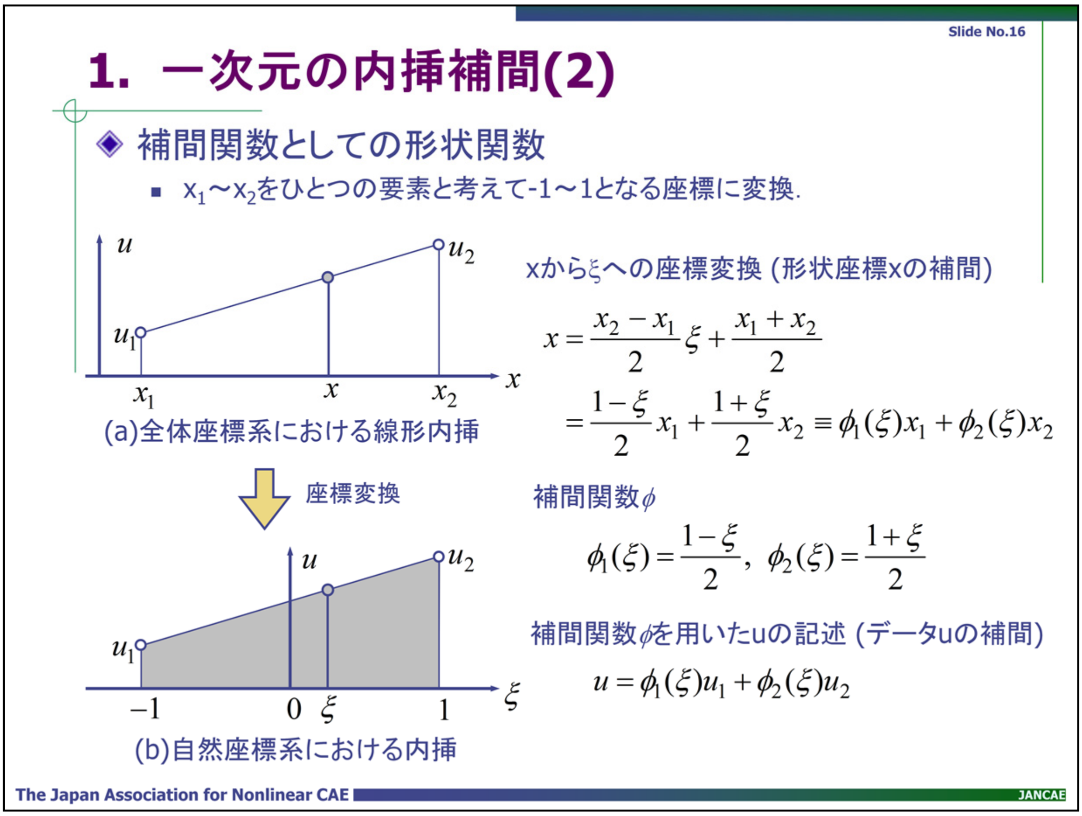
機械系学科の基礎といえば，まずは材料力学です．材料力学でも微小要素を考えて力の釣り合いを微分方程式で表し，これを積分して梁のたわみ曲線を求めます．有限要素法の基本概念も同じです．ただし，理論解析や材料力学では，微小領域から解析領域全体へ一気に積分しますが，有限要素法ではこの間に「有限要素」というレベルの「眼で見える寸法での具体的な分割」が入ります．（力のつりあいの微小要素は抽象的な分割）

このように有限要素法では解析対象となる物体を小さな部分（必ずしも寸法的に小さい必要はありません．応力やひずみの分布の強さに応じて十分「小さく」なっていればいいのです．）に分割します．この分割したものが「要素」です．要素は二次元問題では平面なので三角形や四角形，三次元問題では三角錐や六面体の形状をしています．これらの要素は角の点の座標によって形が決まり，この角の点を「節点（せってん）」と呼びます．

このような要素ごとの式を全体に繋ぎ合わせて，全体の釣り合い式を解きます．得られた式は，残念ながら解析解のように美しくは無いので，この泥臭い計算は計算機に解かせることにします．

【余談】

わからないものを整理，分解して，分解されたレベルで詳細に検討して，再び統合するというロジックは，デカルトの方法序説に見られる科学的方法論です．このあたりの方法論は16世紀と現代もそんなに変わっていないように感じます．



話をできるだけ一般化するために，ここでは，x_1とx_2の中間でゼロ，x_1で－1，x_2で+1の値を持つ正規化された座標系ξ(自然座標系)を用います.

x系からξ系への座標変換を元にして，このξを使ってφ_1とφ_2という単純な関数を定義すると，x_1とx_2の間の任意の点の正規化座標ξから,

$$u(\xi) = \varphi_1 \cdot u_1 + \varphi_2 \cdot u_2 = u_1(\xi-1)/2 + u_2(\xi+1)/2$$

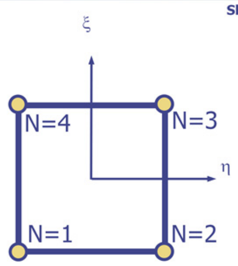
で表すことが出来ます.

興味深いのは，座標xも変位uもいずれも同じ形状関数を用いた内挿関数で定義できるということです.

【余談】

たかが直線近似にφやらξやらを持ち込むあたりが，やや回りくどいように思われるかも知れませんが，一次元で一般化しておくことは，二次元や三次元へ拡張する際に意味を持ちます.

1. ひずみの算出(2)



二次元へ拡張:

座標 $x=\sum_{N=1}^{4}\phi_N(\xi,\eta)x_N,\ y=\sum_{N=1}^{4}\phi_N(\xi,\eta)y_N$

変位 $u_x=\sum_{N=1}^{4}\phi_N(\xi,\eta)u_{xN},\ u_y=\sum_{N=1}^{4}\phi_N(\xi,\eta)u_{yN}$

二次元問題のひずみ: $\varepsilon_x=\frac{\partial u_x}{\partial x}\quad \varepsilon_y=\frac{\partial u_y}{\partial y}\quad \gamma_{xy}=\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}$

一例として, x方向垂直ひずみε_xを展開.

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u_x}{\partial x}=\underbrace{\frac{\partial u_x}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}}=\left(\sum_{N=1}^{4}\frac{\partial \phi_N}{\partial \xi}u_{xN}\right)\boxed{\frac{\partial \xi}{\partial x}}+\left(\sum_{N=1}^{4}\frac{\partial \phi_N}{\partial \eta}u_{xN}\right)\boxed{\frac{\partial \eta}{\partial x}}$$

媒介変数(ξ,η)
微分の連鎖則

一次元同様に逆関係からもとめるただし今回は「行列」となる.

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta}\\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum_{N=1}^{4}\frac{\partial \phi_N}{\partial \xi}x_N & \sum_{N=1}^{4}\frac{\partial \phi_N}{\partial \eta}x_N\\ \sum_{N=1}^{4}\frac{\partial \phi_N}{\partial \xi}y_N & \sum_{N=1}^{4}\frac{\partial \phi_N}{\partial \eta}y_N\end{bmatrix}\equiv[J]\ \xRightarrow{\text{逆行列}}\ [J]^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y}\\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y}\end{bmatrix}$$

では, この考え方を二次元に拡張します. 二次元のひずみになると独立な座標が複数なのでひずみは「偏微分」となります.

一例として, 垂直ひずみεxについて展開して見ます. 微分の連鎖則はξとηという二つの座標があるので, 項が二つになります.

∂ξ/∂xや∂η/∂xを求める必要がありますが, これは一次元同様に∂x/∂ξの逆関係から求めます. ただし, 二次元になると, この逆関係は単なる逆数ではなく, 行列の逆関係すなわち逆行列となることに留意が必要です.

しかし使っている考え方は何一つ変わりません. (一次元は1×1の行列だったので, 逆行列がたまたま逆数だったということです.)

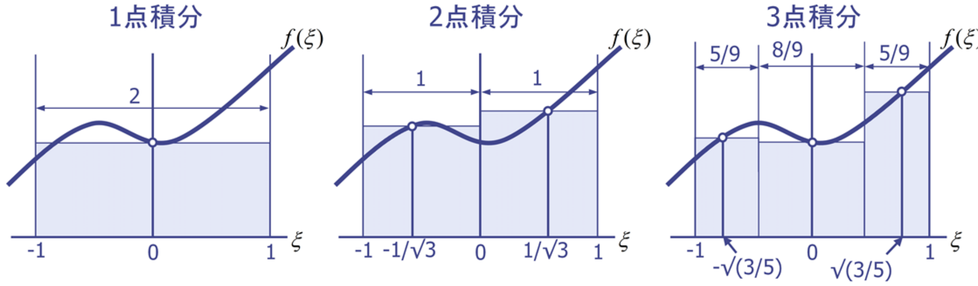
Slide No.18

2.　Gauss-Legendreの積分公式(2)

◈ 積分点数によって積分精度が変わる.

- N_g点積分では$(2N_g-1)$次の多項式まで正確に積分できる.

積分点数 N_g	評価点位置 ξ_i	重みw_i	
1	0	2	1次式まで
2	$-1/\sqrt{3}$	1	3次式まで
	$1/\sqrt{3}$	1	
3	$-\sqrt{3/5}$	5/9	5次式まで
	0	8/9	
	$\sqrt{3/5}$	5/9	

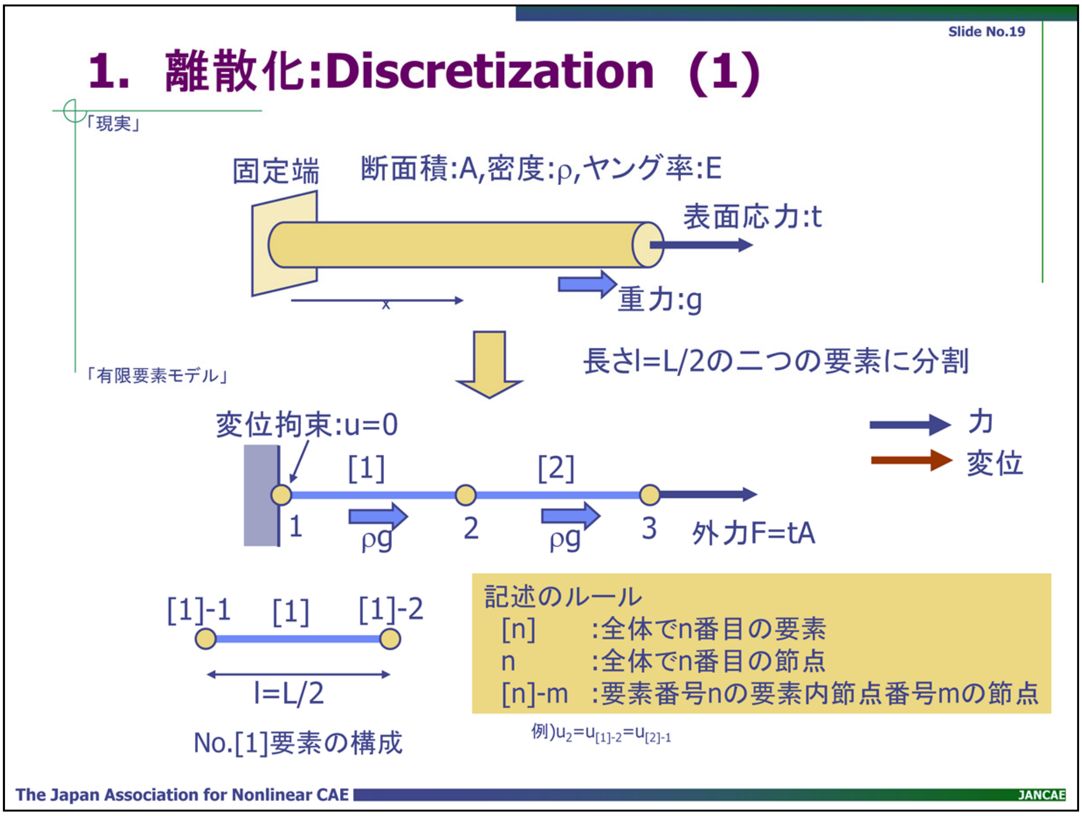


The Japan Association for Nonlinear CAE　JANCAE

Gaussの数値積分の優れた特徴は,「ある代表点」の取り方が工夫されていて,高々二点の代表点を使った積分(すなわち長方形が二個)で,3次式まで「正確に」積分できるという点です.三点の代表点だと,3つしかない長方形で,なんと5次式まで正確に積分可能です.

逆の言い方をすれば,二点積分では3次式まで正確に積分できるように代表点(これを積分点と呼ぶ)の位置を決めているのです.積分点の位置を変数にして,解析的(紙と鉛筆での)積分と結果を比較して,同じになるように積分点の位置を求めると,上記の表の値になります.

興味のある方はやってみてください.評価点の座標はちょっとした計算で自分で導くことができます.



有限要素法で最初にすべき操作は「離散化」です.

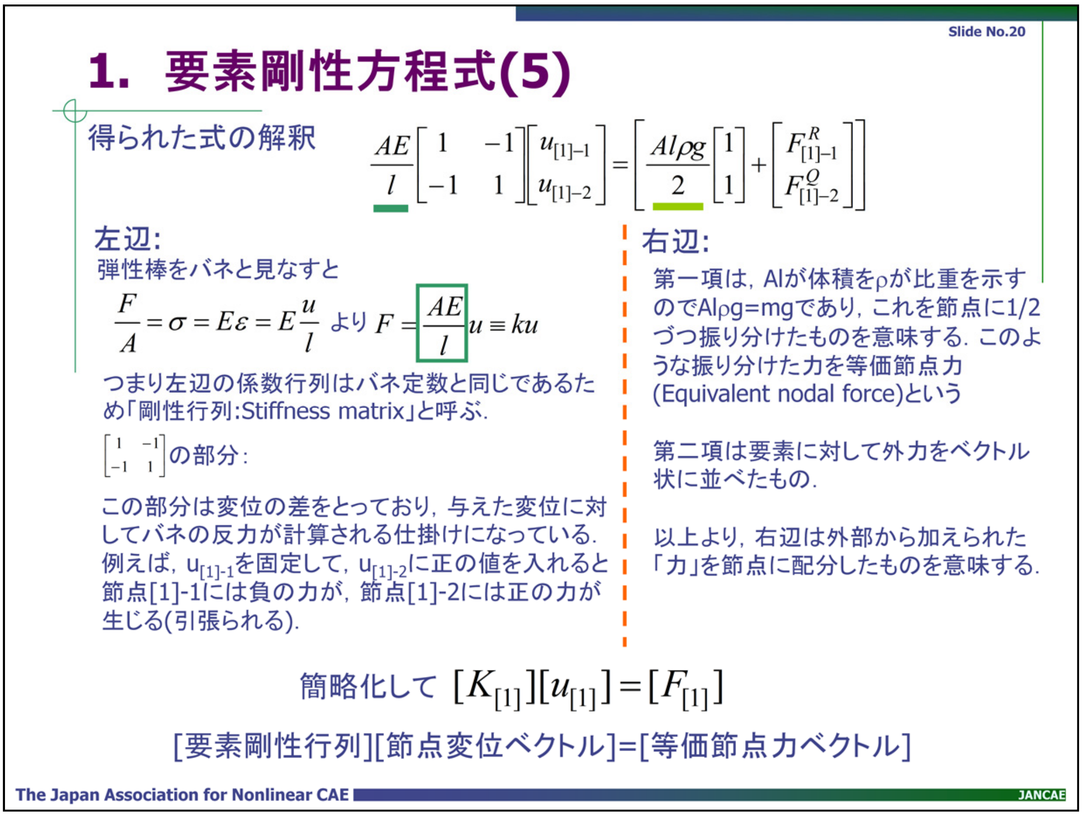
(FEMを「使う」時には要素分割:Meshingの作業です. 最近のプログラムではほとんどが自動で分割してしまうようです.)

現実には微分可能な連続的な分布を持っている「連続体」を, 仮想的に有限の大きさを持つ「要素」に分割します. この分割した「節」となる点を「節点」と呼びます. ここでは, 一本の棒を二つの一次要素に分割します. これにより, 連続体は2つの要素と3つの節点に「離散化」されたことになります.

有限要素では, まずひとつひとつの要素について考えて, その要素の剛性を算出し, これを全体の剛性になるように重ね合わせていきます. ここでは, 要素の番号を[n]のような大括弧で表します. 節点番号については, 「全体での節点番号」と「要素での節点番号」の二つの方法で表現します. 前者は括弧無のnで, 後者は[n]-mの形で[n]番要素を構成する節点の中でのm番目の節点と表現します. 例えば真ん中の節点は, 全体の節点番号ではn=2ですが, 同時に[1]番要素の第2節点([1]-2)であり, さらに[2]番要素の第1節点([2]-1)でもあります.

【余談】

要素内節点番号:場所が変われば役割が変わります. 私も会社では技術者ですが, 家では父親です.



数式展開は例によって高校数学ですが，大切なのは物理です．得られた式をよく見て見ましょう.

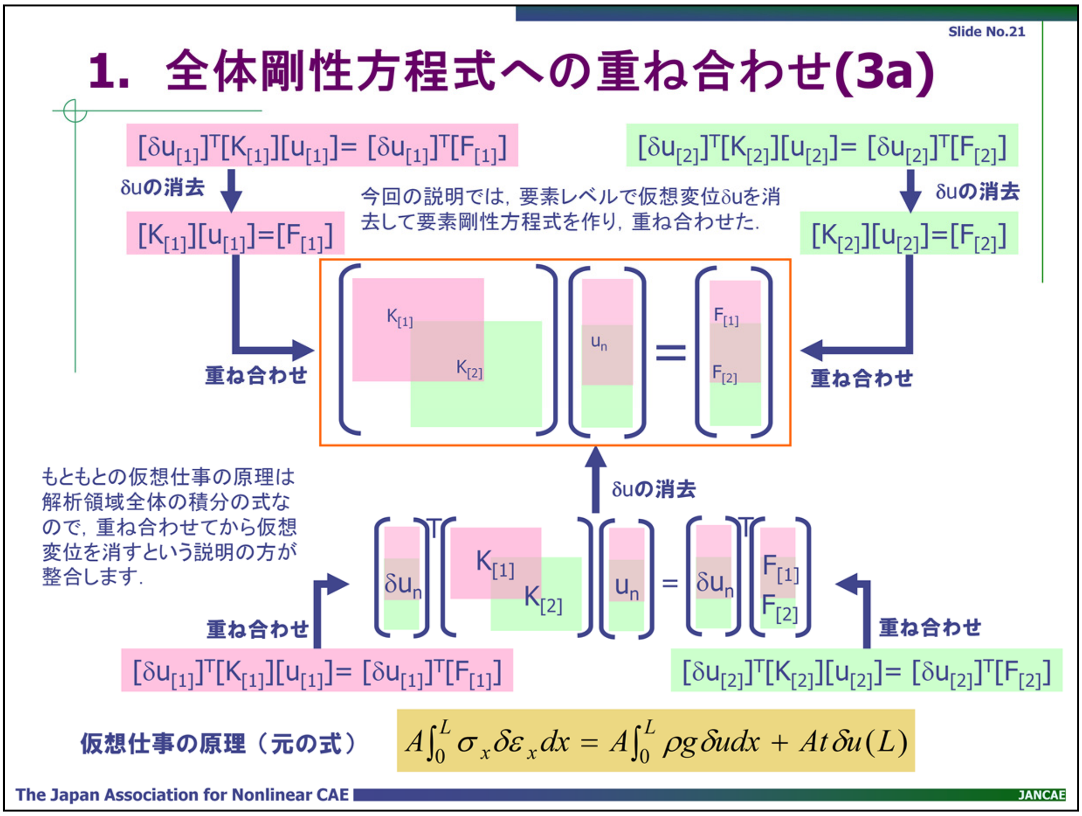
左辺のAE/lは，よく見ると，一要素分の棒をバネとみなしたときのバネ定数kを表していることになります．行列の部分は巧妙にできていて，二つの節点の変位から，相対的な伸びを算出して，それぞれの節点でのバネによる力（内部に変形による力：内力）を算出しています.

右辺の第一項はAlρgという一要素にかかる重力を半分づつにして二つの節点に振り分けています．このように本来は連続体に分布して作用していた力を，積分して，適切に節点に振り分けたものを「等価節点力」と呼びます．右辺の第二項はまさに節点に直接作用する外力のベクトルです．つまり右辺は節点にかかる外力のベクトルです.

これを簡略化すると，「要素の剛性行列（バネ定数もどき）」・「節点変位」＝「外力の等価節点力」となります．これはまさにバネのku=fを行列化しただけであることに気づきます．つまり，離散化されたひとつの有限要素の方程式は節点変位をベクトル状に並べるため，バネ定数の部分が行列になることを除けば，ku=fと全く同じなのです.

このように有限要素法の根底には「バネモデル」があることが分かります．慣れ親しんだバネのku=Fが，ベクトルや行列という大学の講義らしい「衣」をまとって再

度現れたのです.

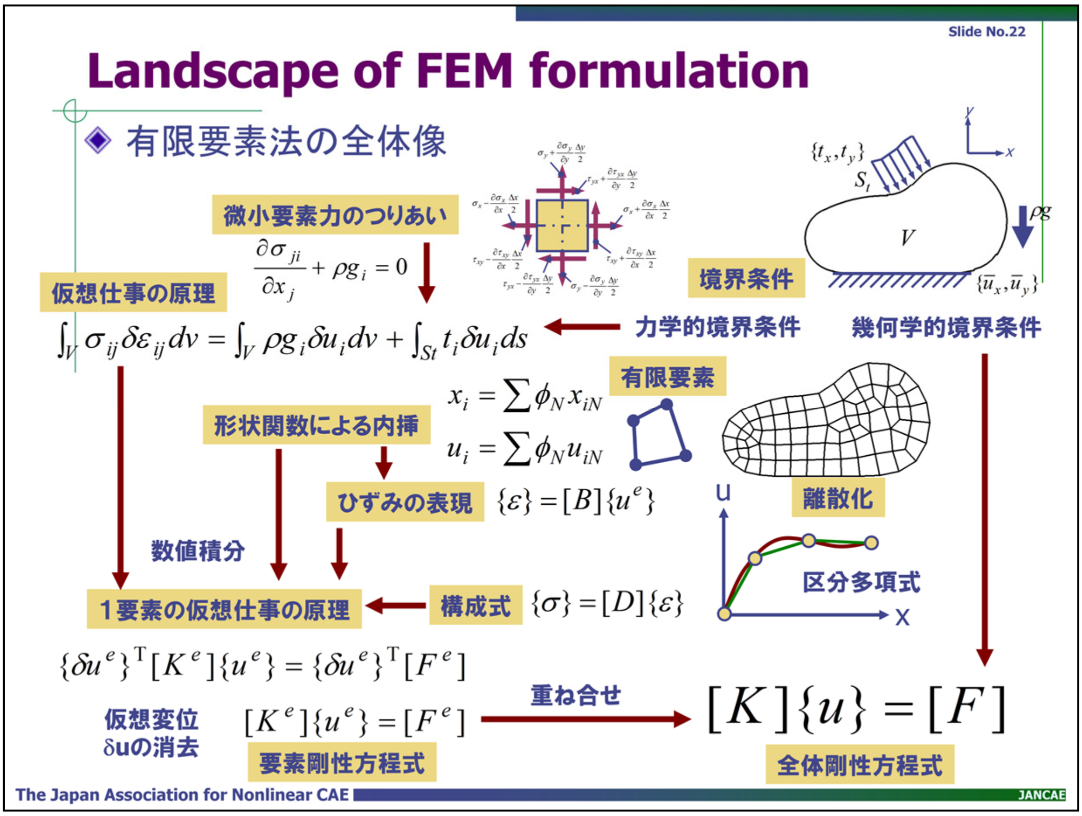


閑話休題:

今回の説明では，要素レベルでの仮想仕事の原理式が出来た段階で，両辺の仮想変位を消去し，要素ごとの「要素剛性方程式」を作成して，これを重ね合わせることで全体剛性方程式を作りました．

仮想仕事の原理式のもともとの式を考えると，解析対象となる領域全体での積分となっています．この式を正確に展開するのであれば，要素ごとの仮想仕事の原理式を作ったあとに，これを重ね合わせて全体の仮想仕事の原理式を求めて，ここで，仮想変位を消去します．

最終的に得られる全体剛性方程式は全く同じですが，理論にこだわる方は，後者の方法の方がすっきりと納得できると思います．プログラム内部の手順としては，前者に近いので前者で説明をしました．（後者の場合は要素剛性方程式という考え方が入る余地がありません．）



有限要素法の全体像を簡単にまとめておきましょう．（いろいろ書きすぎてまとまっていませんね....）

力学の問題の基本は「力のつりあい」です．問題は具体的に形状と境界条件（力学的境界条件と幾何学的境界条件）によって記述されます．

力のつりあいと力学的境界条件を弱形式でまとめたものが仮想仕事の原理です．式をまとめることができたのはよかったのですが，任意の関数として仮想変位を含んでいるところが玉に傷です．

一方，有限要素法は問題の解（ここでは変位ベクトル）を，単純な区分多項式で近似する解法です．今回は多項式として一次関数を主に使いました．

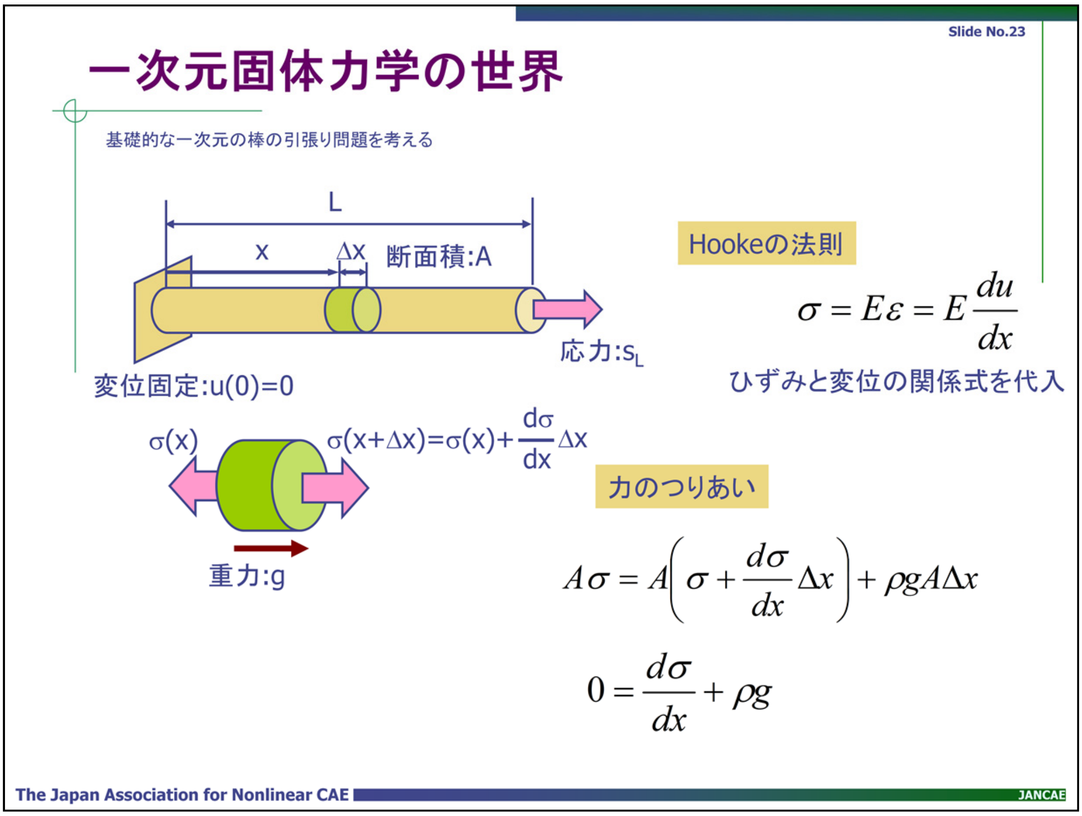
高々，線形近似ですが，節点の空間座標と変位の内挿に形状関数という仕組み（データの重み）を使うことで，要素内での微分が可能になります．変位の空間微分が計算できるということは，ひずみが計算できることになります．

これにひずみと応力の関係式である構成式を加えると，ひとつの要素についての仮想仕事の原理式を数値的に積分してもとめることができます．

任意の仮想変位に対して（1要素の）仮想仕事の原理式を満足するためには，要素剛性方程式が成立すればよいことになります．（ここで任意の関数であった仮想変位が消えます．）

この要素剛性方程式を重ね合わせて，全体剛性方程式を作り，幾何学的境界条件を用いることで，変位を求めるための連立一次方程式をつくることができます．この巨大な連立一次方程式を解けば，変位が求まるという仕組みです．

変位が求まったあとは，[B]を使ってひずみが求まり，[D]を使って応力を求めることができます．応力から内力を計算して，外力と比較して計算が間違っていないこともチェックしましょう．

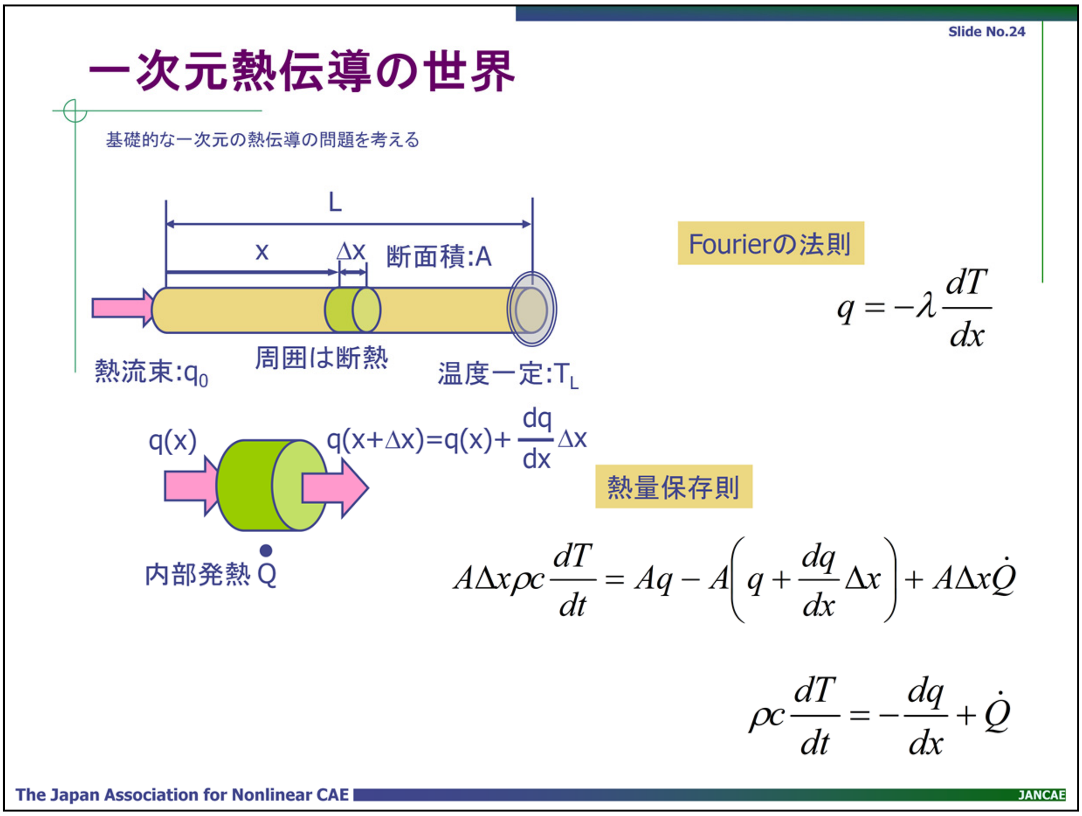


まずは，これまで復習してきた一次元の固体力学の世界を見てみます．一次元限定なので，棒の引張り問題です．具体的には棒が天井から吊るされていて，下端に引張り応力s_Lが作用しています．棒の質量密度をρとして棒の自重も考えることにしましょう（重力加速度はg）．

力学の世界で拠り所となるのは力のつりあいです．左面の応力をσとすれば，微小量Δxだけ離れたところの応力はσ+dσ/dxΔxとなります．力のつりあいは応力に面積を乗じて「力」に直して，右向きの矢印の総和と左向きの矢印の総和をイコールで結びます．微小要素に作用する自重による力は，微小量息の体積AΔxに密度ρをかけて質量にして，これに重力加速度gをかけてやります．整理すると下段のような式になります．

また，応力σとひずみεの関係式は有名なHookeの法則で表されます．さらにひずみと変位の関係から上段の式が得られます．（ひずみが変位uの位置xによる微分で表されるというくだりは，「変位とひずみ」の関係でやりましたので，ここでは詳しく説明しません．）

「Hookeの法則」と「力のつりあい」を並列に示しましたが，物理的な意味での位置づけは異なるように思います．力のつりあいはどのような物体でも満たさねばならない力学の原則ですが，Hookeの法則は，「金属で降伏前の特性」とか「ゴムの1%以内の変形」とかいろいろな条件下で初めて正しいといえる法則です．つまり後者は実験事実に基づいたただの経験則に他なりません．



つぎに，機械系であれば，比較的馴染みやすい熱伝導の世界の復習です．

比較的簡単な問題として，棒の一端の温度を一定に維持しつつ，他端の断面に一定の熱流束を与える問題を考えます．棒の内部での発熱もあるものとして，端面を除いて断熱されているとしましょう．

伝熱の世界の最も根底にある式は「熱量保存則」です．言葉で言えば，入ってくる熱量と出て行く熱量があり，残った熱量はその領域の温度上昇となるということになります．熱流束はベクトルですので，xの正方向を正に取ると，左側から入ってきて，右側から出て行きます（これが正の流れです）．微小領域を考えると，入ってくる熱量をAqとすれば出て行く熱量がA(q+dq/dxΔx)となり，単位体積単位時間あたりの発熱量をQdotとすれば，下段のような熱量保存則が記述できます．これは「熱量がつりあわなければならない」という物理的な要請からくる「普遍性のある原則：バランス」の式です．

一方，Fourierの法則は熱伝達率をλとして，上段のように記述できます．これも物理で習いますが，これは「法則」とは呼ばれていますが，実験結果から経験則として，成立しているものです．あくまでも実験結果として確認されているだけであって，熱量保存則のような普遍性は一般にはありません．（かといって，熱が温度勾配の坂を上ることは熱力学的にありません．）

材料の特性を含む，一種の構成式といえるでしょう．

追記：

熱流束は正方向をx軸上に取ればベクトルとして，微小要素の右面も左面も正方向は右向きの矢印（→）となります．一方，前述の応力の符号の定義は「考えている面に垂直な法線を考えてこれと一致している応力を正とする」というものですので，左面で左向きの矢印（←），右面で右向きの矢印（ → ）となります．これに注意．

Slide No.25

固体力学と熱伝導の式：類似

◈ 得られた方程式は全く同じ！

- 変数や式の意味の対応表は以下のとおり.

	熱伝導	固体力学
解の関数	T:温度	u:変位
解の1階微分	∇T:温度勾配	ε:ひずみ
特徴的な材料特性	λ:熱伝導率	E:Young率
1階微分×材料特性	q:熱流束	σ:応力
原理的な物理則	熱量保存則	力のつりあい
経験的な物理則	Fourier則	Hooke則
境界条件（第一種）	T_L:温度固定	u_0:変位固定
（第二種）	q_0:熱流束既知	s_L:応力既知

The Japan Association for Nonlinear CAE　JANCAE

全くことなる物理現象が，同じ式になる….狐につままれたような気がします.

類似点の対比を見てみます. 表を見ていただければ納得していただけると思います. 固体力学のひずみに対する類似変数は「温度勾配」というやや素っ気無い変数になっています. この「解の1階微分」に特徴的な材料特性を乗じると別の物理的な変数が出てきます. この式が「経験的な物理法則（構成則）」です. これに対して「原理的な物理法則」は「何らかのバランス」を示した式になっていることも共通しています. 問題を具体低に解くための境界条件についても類似しています.

いかがでしょうか？物理学はよくできていると思いませんか？

追記1：

基礎的な境界条件には二種類あります. 第一種境界条件（基本境界条件またはDirichlet条件）は解の関数そのものを規定する境界条件であり，解くべき関数の温度Tや変位uを固定するものです. これに対して，解くべき関数の一階微分を規定する境界条件を第二種境界条件（自然境界条件またはNeumann条件）と呼びます. 第二種境界条件の場合は，解の二階微分に何らかの係数を乗じて(伝熱であれば熱伝導率をかけて熱流束，固体力学であればヤング率をかけて応力）物理的に意味のある変数の形で与えられます.

追記2：

熱伝導では表面の対流熱伝達として$q=-h(T-T_{env})$という式をよく使います. これを固体力学に適用するとどのようになるでしょうか？上記のスライドを参考に

すると$\sigma=k(u-ua)$のような形になると想像できます．これは変形体を何かフカフカするパッドの上に置いたときの境界条件を示しています．つまりフカフカのパッドにめり込むとめり込んだ分だけ押し返してくるという境界条件になります．（このような支持は「弾性床」と呼ばれます．）

熱伝導の輻射に相当する固体力学の境界条件はありませんが，あえて言えば「4次の非線形特性を持つ弾性床」ということになります．

Slide No.26

固体力学と熱伝導の式：相違

- 仮定の元で得られた方程式は全く同じだが．
  - 熱伝導での仮定：
    - 「定常状態」にある．
    - 非定常であれば，温度変化項$c\rho dT/dt$を含む．
  - 固体力学での仮定：
    - 物体が「静的なつりあい状態」にある．
    - 動的なつりあい状態であれば，加速度項$\rho d^2u/dt^2$を含む．
- 明瞭な差異：
  - 動的（または非定常）で含まれる時間微分項：
    - 伝熱では1階微分dT/dt，固体では2階微分d^2u/dt^2となる．
  - 2または3次元に拡張すると…..
    - 固体: 変位uはベクトル，応力σとひずみεは2階のテンソル,材料特性（応力ひずみ関係式）は4階のテンソル．
    - 伝熱: 温度Tはスカラ，熱流束qと温度勾配∇Tはベクトル,熱伝導率λは(実は一般的には)2階のテンソル．

The Japan Association for Nonlinear CAE JANCAE

共通項を探して，理解を広げるということと同時に，差異を明確にすることで，それぞれの物理現象の特徴的な現象を説明することもできます．仮定の下で得られた式は全く同じでしたが，どのような仮定をおいたのかを確認しておきましょう．

固体の場合は明確には述べておりませんが，静的なつりあい（Static equilibrium）を仮定しています．これを仮定しない場合はNewtonの運動方程式の意味での力のつりあいとなり，加速度項を考慮しなければなりません．固体力学では加速度項を含む場合を動力学（Dynamics）と呼びます．

伝熱の場合は定常問題を仮定して，考えている領域に入ってくる熱量と出て行く熱量を等しいとしました．これが等しくない場合は領域の温度が時間変化する非定常問題となります．では固体力学で加速度項を考える動力学として，伝熱で非定常を考えても同じ式になるでしょうか？

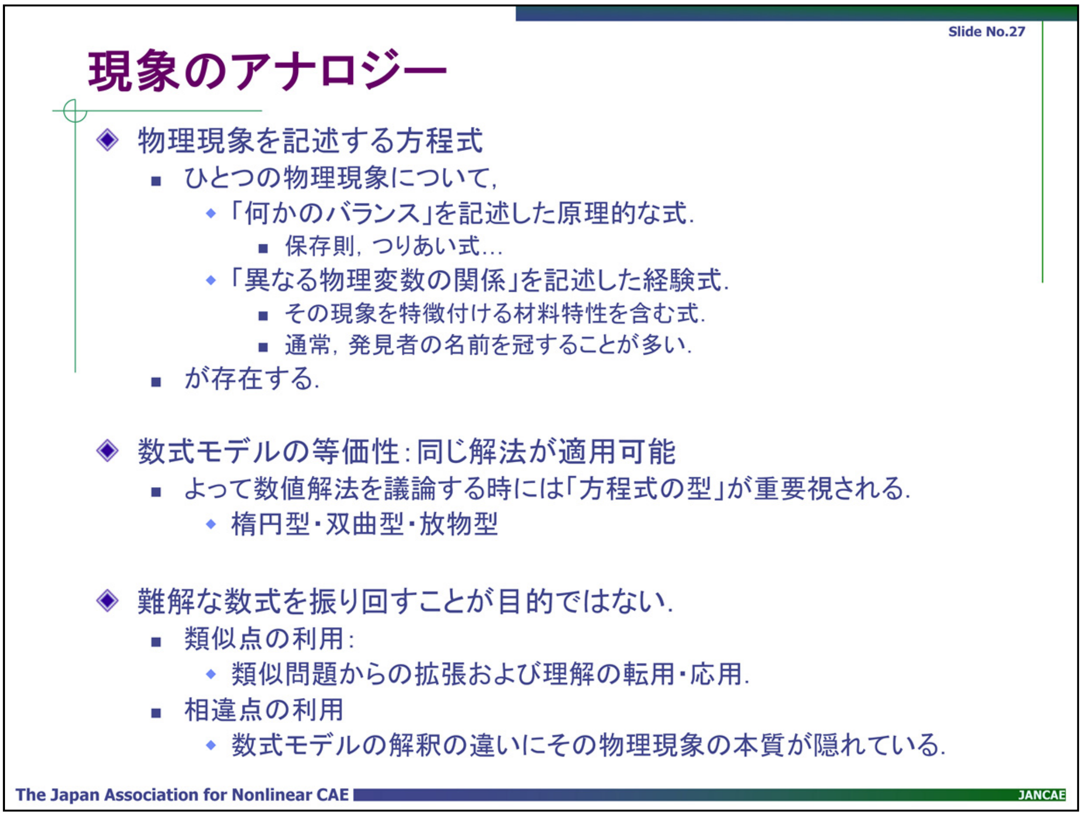
残念ながら同じ式にはなりません．加速度は変位の二階時間微分（時間の一階微分が速度で，さらにもう一回時間微分して加速度）ですが，温度変化は時間の一階微分です．これが，固体問題では振動があるのに，伝熱問題では振動が生じないことを意味しています．（応力波という言葉は聞いたことがありますが，熱流束波という言葉は聞いたことがありませんね．熱は波にはなりません．）

また，大きな違いがもうひとつあります．これまでは意図的に1次元問題を扱ってきましたが，二次元，三次元になるとどうでしょうか？

決定的な違いは，変位uが大きさと方向を持ったベクトル変数であるのに対して，温度Tが大きさしか持たないスカラ変数であることです．このため，温度の空間勾配はベクトル∇Tとなるのに対して，変位の空間微分は変位勾配（Displacement gradient）となり（回転を除去することで）ひずみという二階のテンソル（行列）となります．応力も行列ですから，二つの二階のテンソルを関係付ける式は四階のテンソルとなります（Hookeの法則は連続体力学では四階のテンソルで現されます）．このように考えると，Fourierの法則にも別の顔が見えます．つまり，均質で等方な物体でない場合（例えば結晶の方位で熱の伝わり方が異

なるか積層材のような構造）は熱伝導率はひとつのスカラ値ではなく，熱流束ベクトルqと温度勾配ベクトル∇Tを関係づける二階のテンソル（行列）となるということです．

いかがでしょうか？類似点を見ることで二つの異なる物理現象の共通的な解き方（解くべき変数は何か？境界条件はどのように与えるべきか？）がイメージできます．一方，相違点を明確にすることで，その物理現象の独特の振る舞いを説明することができ，相似的に拡張することで，物理変数や材料特性のテンソルとしての階数まで想像することができます．



最後にコメントです．

くれぐれも申し上げます．研究や開発にとって大事なことは「難解な数式を振り回すこと」ではありません．対象としている現象をより深く理解することです．

物理現象をよりクリアに理解するために，

1　まずは一分野をしっかりと修めること．

2　新しい現象を相手にするときには，ゼロスタートではなく，既に修めた土台をうまくつかって，イメージを膨らませることができる．

という例えです．

ポイントは，

何を解いているのか（固体力学では変位u，伝熱では温度T）？

その空間微分は何か（固体ではひずみや応力，伝熱では温度勾配や熱流束）？

拠り所となる原理式（バランスの式）と物性を含む経験式（構成式）は何か？

このような現象のアナロジーを見てとることが出来るのは我々が「数学」という言葉を持っているからです．（数学も含めた言葉というのは人類最大の発明かも知れません．）

私の話は, 以上です.